

**Решения, ответы и критерии оценивания заданий муниципального
этапа ВсОШ по математике
2025-2026 учебный год**

7 класс

1. На карточках написаны натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей, разбив карточки на пары. Какое максимальное количество дробей могут быть целыми числами?

Решение

Рассмотрим пары чисел, из которых составляются дроби (числитель и знаменатель).

Чтобы дробь могла оказаться целым числом, числа большее $22/2=11$ не должны стоять в знаменателе, при этом простые числа в числителе 13, 17, 19 могут дать целое число только с 1 в знаменателе, значит, все 11 дробей целыми числами быть не смогут. Покажем, что 10 дробей могут быть целыми числами.

$$\frac{22}{11}; \frac{20}{10}; \frac{18}{9}; \frac{16}{8}; \frac{14}{7}; \frac{12}{6}; \frac{15}{5}; \frac{21}{3}; \frac{4}{2}; \frac{13}{1}.$$

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верное и обоснованное решение – 7 баллов.

Приведен пример 10 дробей, но нет обоснования почему нельзя составить больше – 2 балла.

Показано только, что 11 целых чисел получить не удастся – 4 балла.

2. Сумма трех натуральных чисел (не обязательно различных) равна 1000. Из этих чисел составляют три попарные разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма этих попарных разностей?

Решение

Пусть a, b, c – данные числа. Условимся, что $a \leq b \leq c$. Тогда сумма разностей будет равна

$$(b-a)+(c-a)+(c-b)=2c-2a. \text{ Так как } a+b+c=1000, \text{ то } c \leq 998 \text{ и, следовательно, } 2c-2a \leq 2 \times 998 - 2 \times 1 = 1994.$$

Таким образом, найденная сумма достигается при $c=998$ и $a=b=1$.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верное и обоснованное решение – 7 баллов.

Приведен пример с верной суммой, но нет обоснования почему нельзя составить большую – 2 балла.

Проведена верная оценка суммы разностей без указания значений a, b, c – 5 баллов.

3. Спускаясь по движущемуся вниз эскалатору, Миша насчитал 50 ступенек, а Саша – 75. Во сколько раз Саша спускается быстрее Миши, если на неподвижном эскалаторе 100 ступенек?

Решение

1 способ. Пусть, пока Миша проходит одну ступеньку, эскалатор убирает x ступенек. Тогда на неподвижном эскалаторе $50 + 50x$ или 100 ступенек. Имеем уравнение $50 + 50x = 100$, из которого $x = 1$.

Пусть, пока Саша проходит одну ступеньку, эскалатор убирает y ступенек. Тогда на неподвижном эскалаторе $75 + 75y$ или 100 ступенек. Имеем уравнение $75 + 75y = 100$, из которого $y = 1/3$.

Эскалатор движется с одной скоростью. Значит, Саша спускается быстрее Миши в 3 раза.

2 способ. Миша идет с той же скоростью, что и эскалатор, так как за одно и то же время они «прошли» по 50 ступенек. А Саша идет в 3 раза быстрее, чем эскалатор, так как за одно и то же время Саша прошел 75 ступенек, а эскалатор только $100 - 75 = 25$ ступенек. Значит, Саша спускается в 3 раза быстрее Миши.

Или то же самое в алгебраической форме: Пусть x , y , v – скорости Миши, Саши и эскалатора соответственно. Тогда время спуска Миши – $50/x$, а эскалатор соответствующее время эскалатора – $(100 - 50)/v$. Время спуска Саши – $75/y$, и соответствующее время эскалатора – $(100 - 75)/v$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{50}{x} = \frac{50}{v}, \\ \frac{75}{y} = \frac{25}{v}. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе и выразим $y/x = 3$, значит, Саша спускается в три раза быстрее Миши.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верное и обоснованное решение – 7 баллов.

При решении алгебраическим способом верно составлена математическая модель задачи (система уравнений), но решена неверно или решение не доведено до конца – 5 баллов.

При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка, не влияющая на ход рассуждений, в результате чего получен неверный ответ – 6 баллов.

4. Имеются три кучки по 30 камней. Играют двое. Ходы делают по очереди. За один ход разрешается взять любое количество камней из одной

кучки или поровну из любых двух кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Как играть, чтобы выиграть?

Решение

Выигрывает первый игрок.

Выигрышная стратегия. Первым своим ходом первый игрок полностью забирает одну кучку. Затем отвечает на ходы второго игрока так: берет столько же камней, сколько и второй игрок, но только из другой кучки.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верный ответ и описаны примеры вариантов игры – 0 баллов.

Верный ответ и для первого игрока описана стратегия, но она не работает – 0 баллов.

Верный ответ и для первого игрока приведена верная выигрышная стратегия – 7 баллов.

5. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на полосы 1×4 ? Ответ обосновать.

Решение

Нельзя. Вводим раскраску (рис.1).

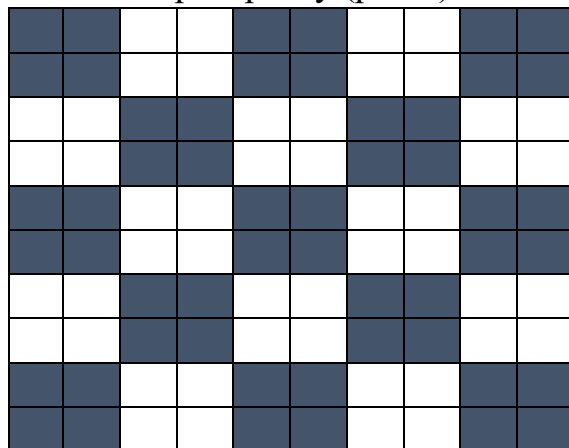


Рисунок 1

Каждая полоска 1×4 накрывает ровно 2 белых и 2 черных клетки. Значит, если разрезать можно, то на доске белых и черных клеток поровну, а это не так.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верный ответ и обоснование примерами разрезания – 0 баллов.

Верный ответ и для его обоснования приведена раскраска, которая не «работает» - 0 баллов.

Верный и обоснованный ответ – 7 баллов.