

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2025-2026 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе**

Теоретический тур

7 класс

Максимальное количество баллов - 35.

Время выполнения - 235 минут.

Краткая инструкция.

Все олимпиадные задания выполняются письменно. Желательно пользоваться ручками с чернилами синего цвета. Чертежи производить желательно ручкой (сначала возможно использовать карандаш, но потом чертеж обвести ручкой).

Разрешается использовать чертёжные принадлежности (линейка, циркуль, ластик) для выполнения заданий.

Участник олимпиады на выданном бланке ответов записывает подробные решения задач, указывая соответствующий номер задачи. Переписывать формулировки заданий не обязательно. Предварительные вычисления можно делать на выданных дополнительных листах (черновиках).

При выполнении заданий не допускается использование справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

После завершения работы все бумаги должны быть сданы организаторам олимпиады, включая черновики.

Решения задач, критерии оценивания

Задача 1.

Пять спортсменов участвовали в соревнованиях. Сумма их баллов — 200. Сумма баллов у тех, кто в итоговом протоколе ниже Кати — 115. Ниже Лены — 45, ниже Маши — 75, ниже Саши — 20. Сколько баллов у Насти? В итоговом протоколе выше находятся те, кто получил больше баллов.

Решение.

Чем больше сумма баллов тех, кто ниже спортсмена в итоговом протоколе, тем выше этот спортсмен находится в этом протоколе. Сумма тех, кто ниже Саши самая маленькая (но не ноль), значит он находится ниже Кати, Лены и Маши. Но кто-то должен располагаться еще ниже, это может быть только Настя. Значит у нее 20 баллов.

Ответ: 20.

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Только ответ без обоснования – 1 балл.

Задача 2.

В школьной столовой выстроились в очередь 2025 учеников, и одного из них зовут Петя. Каждый ученик в очереди — либо отличник (всегда говорит правду), либо хулиган (всегда обманывает). Каждый, кроме Пети, заявил: «Между мной и Петей в очереди стоят ровно два хулигана». Сколько в очереди хулиганов, если известно, что Петя — отличник?

Решение.

Те, кто стоят рядом с Петей, и те, кто стоят через одного человека от него, заведомо врут. Поэтому тот, между кем и Петей стоят ровно два человека, — отличник. Перебирая по очереди каждого стоящего за этим отличником, (удаляясь от Пети), убеждаемся, что все они — также отличники.

Заметим теперь, что количество людей, стоящих в шеренге рядом с Петей или через одного человека от него, может быть различным. Их может быть:

- 1) двое, если Петя – крайний в шеренге;
- 2) трое, если Петя – второй с краю;
- 3) четверо во всех остальных случаях.

Ответ: 2, 3 или 4.

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Обоснованно найдено два варианта из трех – 5 баллов, один вариант из трех – 2 балла. Только ответ без обоснования – 0 баллов.

Задача 3.

Могут ли выражения $n+2$ и $5n+1$ одновременно быть простыми числами при каком-либо натуральном n ? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.

Решение.

Если n четное, то четно и число $n+2$, если же n нечетное, то четно число $5n+1$. Но эти числа ни при каком натуральном n не могут равняться 2. Значит одновременно они не могут быть простыми.

Ответ: нет, не могут.

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Есть верные рассуждения, связанные с четностью чисел, но решение не доведено до конца – 1-3 баллов. Рассмотрены частные случаи значений чисел и сделан вывод – 0 баллов. Только ответ без обоснования – 0 баллов.

Задача 4.

Две лодки плывут по реке в одном направлении друг за другом со скоростью 2 м/с, при этом расстояние между ними – 30 м. Затем они последовательно попадают в участок с сильным встречным течением, где их скорость становится 1,5 м/с, а после — в зону густых водорослей, где скорость падает до 1 м/с. На каждом участке они плывут не меньше 10 минут.

Каким стало расстояние между лодками, когда обе плывут в водорослях?

Решение.

Когда первая лодка перешла на $v_2=1.5$, вторая ещё плыла со скоростью v_1 . Тогда $t_1=30/2=15$ — время, за которое вторая достигла границы. За это время первая прошла $1.5 \cdot 15=22.5$, а новое расстояние между ними: 22.5.

Когда первая перешла на скорость $v_3=1$ м/с, вторая плыла со скоростью v_2 : $t_2=22.5/1.5=15$. За это время первая прошла $1 \cdot 15=15$. Новое расстояние между лодками составляет 15 м.

Ответ: 15 м.

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Есть верные рассуждения, но решение не доведено до конца или имеются арифметические ошибки в подсчетах – 1-4 баллов. Рассмотрены частные случаи расположения лодок и сделан вывод – 0 баллов. Только ответ без обоснования – 0 баллов.

Задача 5.

Найдите последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + \dots + 88^2$.

Решение.

Последняя цифра суммы квадратов чисел от 1 до 9 равна последней цифре числа $1+4+9+6+5+6+9+4+1$, то есть 5. То же самое для суммы квадратов чисел от 10 до 19 и т.д.

Тогда сумма чисел $1^2 + 2^2 + \dots + 89^2$ оканчивается на 5, т.к. в сумме у нас 9 пятерок. Но нам нужно найти последнюю цифру этой суммы без 89^2 , которое оканчивается на 1. Получаем 4.

Ответ: 4.

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Есть верные рассуждения с последними цифрами, но решение не доведено до конца или имеются арифметические ошибки в подсчетах – 1-4 баллов. Только ответ без обоснования – 0 баллов.