

Решения МЭ ВсОШ • 7 класс

1. По кругу через равные промежутки стоят 8 ребят. У каждого из них есть мячик. Раз в минуту каждый ребенок кидает мячик, который у него есть в данный момент, одному из своих соседей или ребенку, стоящему напротив. Могло ли по прошествии 5 минут оказаться, что у каждого ребенка есть тот же мячик, который был у него изначально, при этом в каждый момент времени у каждого ребенка был ровно один мячик?

Ответ. Могло. **Решение.** Предъявим один из возможных алгоритмов. Пусть в первую минуту каждый из детей кинет мяч ребенку напротив, а затем оставшиеся 4 броска кидает мяч соседу против часовой стрелки. Тогда через 5 минут, каждый из детей получит свой мяч назад.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов. За недостаточное обоснование примера баллы не снимать.

2. Пятиклассник Петя прослушал, как сокращать дроби. Он подумал, что сократить дробь — это попарно зачеркнуть одинаковые цифры и в числителе, и в знаменателе дроби. Например, дробь $\frac{123}{3513}$ Петя может сократить так $\frac{1\cancel{2}\cancel{3}}{\cancel{3}5\cancel{1}\cancel{3}} = \frac{2}{53}$, или так $\frac{\cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}}{35\cancel{1}\cancel{3}} = \frac{2}{35}$. Учитель задал пример на сокращение дроби, где числитель и знаменатель — двузначные числа с ненулевыми цифрами. Петя решил задачу своим способом и при этом получил верный результат, равный $\frac{1}{5}$. Найдите все дроби, которые мог задать учитель Пете.

Ответ. Только дробь $\frac{19}{95}$. **Решение.** Так как Петя после «сокращения» получил верный результат, то исходная дробь имела вид: $\frac{x}{5 \cdot x}$, где x — двузначное число. Значит знаменатель дроби делился на 5. Так как в исходной дроби все цифры ненулевые, то знаменатель оканчивался на 5. Значит, числитель и знаменатель исходной дроби — двузначные нечётные числа.

Переберем возможные значения числителя:

$x = 11$: тогда дробь равна $\frac{11}{55}$ — «сократить» её Петя не может;

$x = 13$: тогда дробь равна $\frac{13}{65}$ — «сократить» её Петя не может;

$x = 15$: дробь равна $\frac{15}{75}$ — «сократить» её Петя может только $\frac{1\cancel{5}}{\cancel{7}\cancel{5}} \neq \frac{1}{7}$;

$x = 17$: тогда дробь равна $\frac{17}{85}$ — «сократить» её Петя не может;

$x = 19$: дробь равна $\frac{19}{95}$, Петя может «сократить» её так: $\frac{19}{95} = \frac{19}{95} = \frac{1}{5}$;
 $x \geq 21$: знаменатель дроби $5 \cdot x \geq 105$ — уже не двузначное число.

Критерии. Приведен верный пример дроби, но не доказано, что других подходящих дробей нет — 3 балла.

3. Автобус поехал из города в деревню. Сначала он ехал по шоссе со скоростью 80 км/ч, потом — по проселочной дороге со скоростью 60 км/ч, а затем — по бездорожью со скоростью 40 км/ч. За 4 часа он проехал 250 километров. На что он потратил больше времени — на езду по шоссе или езду по бездорожью?

Ответ. На езду по шоссе. **Решение.** Если бы автобус проехал и по шоссе и по бездорожью одинаковое время, равное t , он проехал бы расстояние $80t + 40t = 120t$. Заметим, что если бы автобус ехал всё это время ($t + t = 2t$) по проселочной дороге, он проехал бы то же самое расстояние, равное $2t \cdot 60 = 120t$. Поэтому если время движения по шоссе равно времени движения по бездорожью, то автобус проехал бы такое же расстояние, как если бы всё время двигался по проселочной дороге, равное $4 \cdot 60 = 240$ км. А так как он проехал большее расстояние (250 км), то и время в пути с большей скоростью (то есть по шоссе) было больше.

Приведём еще одно решение.

Решение. Пусть время движения по шоссе, по проселочной дороге и по бездорожью равно соответственно t_1 , t_2 и t_3 . Тогда справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 4 \\ 80t_1 + 60t_2 + 40t_3 = 250. \end{cases}$$

Если мы выразим из первого уравнения $t_2 = 4 - t_1 - t_3$, подставим во второе, раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и сократим на 20, то получим: $t_1 - t_3 = \frac{1}{2}$. Значит $t_1 > t_3$.

Критерии. Верно составленная система уравнений — 2 балла.

4. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, обведены по линиям сетки 20 прямоугольников. Для каждого прямоугольника Максим посчитал и выписал на доску его площадь и периметр. Могло ли так случиться, что на доске были записаны в некотором порядке все натуральные числа от 21 до 60 включительно?

Ответ. Не может. **Решение.** Предположим, что такое могло быть. Периметр клетчатого прямоугольника $a \times b$ равен $2a + 2b$, то есть чётный. Так как от 21 до 60 всего 20 чётных и 20 нечётных чисел, то все нечётные числа это площади, а все чётные — периметры. Посмотрим на большое простое число, например на 59. Оно нечётное, значит 59 — это площадь одного из прямоугольников. Так как 59 простое, то это прямоугольник 1×59 . Но тогда его периметр $2 \cdot (1 + 59) > 60$, противоречие.

Критерии. Замечено, что периметр клетчатого прямоугольника всегда чётный — 2 балла.

5. Миша составил натуральное число x из цифр 6, 7, 8, 9, 0, используя каждую из них хотя бы по одному разу. Федя составил натуральное число y из цифр 1, 2, 3, 4, 5, используя каждую из них хотя бы одному разу. Могло ли так оказаться, что $y = 3x$?

Ответ. Не могло. **Решение.** Допустим, что такие числа существуют. Умножим «столбиком» число x на 3. В записи x содержится девятка, допустим, в разряде, соответствующему 10^k . Тогда в том же самом разряде в числе y получится цифра 7 (от произведения $3 \cdot 9 = 27$) плюс не более 2 от перехода через разряд, так как вся правая часть числа x , умноженная на 3, меньше $3 \cdot 10^k$. То есть в числе y должна быть цифра 7, 8 или 9. Противоречие.