

**МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ
(КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)
Максимальное количество баллов – 35 баллов**

Решения и критерии проверки.

1. Вдоль дорожки между домиками Пятачка и Винни-Пуха растут в ряд в некотором порядке 15 дубов и 15 берёз. Отправившись из своего дома в гости к Винни, Пятачок собирал по пути жёлуди. Спрятав свою добычу в дупле 10-го дуба (считая от собственного дома), он пробежал мимо оставшихся 10 деревьев и оказался у домика Винни. На следующий день Винни отправился из дома в гости к Пятачку. Миновав 6-й дуб, Винни стал считать растущие вдоль дорожки деревья и закончил это увлекательное занятие у дома Пятачка. Сколько деревьев насчитал Винни-Пух? *Ответ нужно подтвердить объяснениями и вычислениями.*

Ответ: 19. **Решение.** Пятачок пробежал мимо 10 оставшихся деревьев, значит, 10-й дуб – это $30 - 10 = 20$ -е для него дерево. За 10-м дубом растут ещё 5 дубов. Поэтому 6-й дуб для Пуха – это и есть 10-й для Пятачка и 20-е дерево для Пятачка. Поэтому после него Пух насчитает 19 деревьев.

Критерии. Приведено верное решение с полным объяснением всех ключевых моментов – **7 баллов**. Получен ответ 19 при наличии верных арифметических действий, приводящих к ответу, без объяснений – **6 баллов**. Получен верный ответ 19 и присутствует только объяснение, возможно в виде схемы, про 5 дубов и 5 берёз от 10-го дуба до дома Винни – **5 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

2. Найдите такое пятизначное число *КЛАСС*, что выполняется равенство

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{L} + \frac{1}{A} + \frac{1}{C} = \frac{10}{C}.$$

Достаточно привести один пример и объяснить, почему он подходит. Разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы – одинаковые цифры.

Ответ: есть 6 возможных чисел: *КЛАСС* = 23699, 26399, 32699, 36299, 62399, 63299. Действительно, например, при $K=2$, $L=3$, $A=6$, $C=9$ получаем:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{10}{9} - \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1, \quad 1 = 1.$$

Критерии. 7 баллов – приведен верный пример, показано, что при подстановке К, Л, А, С получается верное числовое равенство. **6 баллов** – приведено верное числовое равенство с дробями без числа КЛАСС. **2 балла** – приведен только верный пример числа КЛАСС, без каких-либо объяснений, связанных с дробями. **0 баллов** – в остальных случаях.

3. Сумма десяти последовательных натуральных чисел равна 20252025...2025, где 2025 повторяется в записи 1000 раз. Сколько чисел из этих десяти делятся на 3? *Ответ нужно подтвердить объяснениями и вычислениями.*

Ответ: 4. Решение 1. Пусть первое число – это x . Тогда имеем:

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) + (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9) = 2025 \dots 2025,$$

$$10x + 45 = 20252025 \dots 2025,$$

$$10x = 20252025 \dots 20251980 \text{ (здесь 2025 повторяется 999 раз),}$$

$$x = 20252025 \dots 2025198.$$

Сумма цифр числа x делится на 3, значит, по признаку делимости на 3 само число делится на 3. Следовательно, $x+3$, $x+6$ и $x+9$ делятся на 3. То есть чисел с требуемым свойством – четыре.

Решение 2. Сумма цифр числа 2025...2025 делится на 3, значит, по признаку делимости на 3 само число делится на 3. То есть сумма 10 последовательных натуральных чисел делится на 3. Сумма любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 3, поэтому сумма первых 9 чисел (трёх троек последовательных чисел) делится на 3. Следовательно, и последнее число тоже делится на 3. Таким образом, 4 числа из десяти делятся на 3.

Решение 3. Каждое третье число натурального ряда делится на 3, значит из 10 чисел количество делящихся на 3 не меньше 3. Правая часть уравнения делится на 3, значит и левая делится на 3. Рассмотрим остатки при делении на 3 десяти чисел натурального ряда:

а) если первое число при делении на 3 имеет остаток 1, то $1+2+0+1+2+0+1+2+0+1=10$, значит сумма чисел не делится на 3,

б) если первое число при делении на 3 имеет остаток 2, то $2+0+1+2+0+1+2+0+1+2=11$, поэтому сумма чисел не делится на 3,

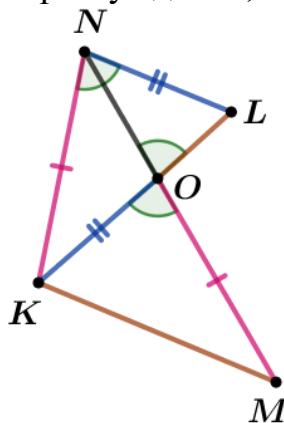
в) если первое число при делении на 3 имеет остаток 0, то $0+1+2+0+1+2+0+1+2+0=9$, следовательно, сумма 10 последовательных чисел делится на 3.

Значит чисел, делящихся на 3, должно быть 4.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов**. Если доказано, что крайнее число делится на 3, но верный ответ не получен – **5 баллов**. Если не доказано, что крайнее делится на три и получен верный ответ – **2**

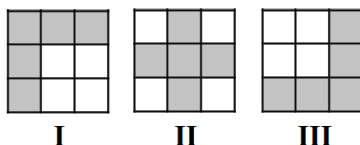
балла. Верно, построена математическая модель, дальнейших продвижений нет – **2 балла**. Иначе – **0 баллов**.

(За верный ответ при наличии первого (или последнего) числа и рассуждения, что первое число делится на 3 – **6 баллов**. За верный ответ при наличии первого числа или последнего (без указания делимости числа на 3) – **3 балла**.)



4. Отрезки KL и MN пересекаются в точке O . Известно, что $KO=NL$, $KN=MO$, углы KNL и NOL равны, а отрезок KO на 1 см короче отрезка MK . Найдите длину OL . Ответ нужно подтвердить объяснениями и вычислениями.

Ответ: 1. Решение. Углы KOM и NOL равны (вертикальные), NOL и KNL равны по условию. Получаем, что равны углы KOM и KNL . Так как по условию $KO=NL$, $KN=MO$, то треугольники KOM и KNL равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, равны их соответствующие элементы. То есть



$KM=KL$. $KL=KO+OL$. По условию, $KM=KO+1$. Отсюда $KO+OL=KO+1$, значит, $OL=1$.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**. Ход рассуждений верный, но не все шаги обоснованы – до **5 баллов**. За доказательство равенства треугольников KOM и KNL – **3 балла**. Решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

5. Можно ли записать в каждой из клеток таблицы размером 3×3 одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5 таким образом, чтобы в каждой из серых фигур I, II, III встречались все пять чисел? Если да – покажите, как, если нет – объясните, почему.

	a	
d	b	e
	c	

Ответ: Нельзя. Решение 1. Заметим, что каждая клетка таблицы содержится не более, чем в двух закрашенных фигурах (в тех, которые содержат ее строку и ее столбец). Поэтому для того, чтобы данное число попало в каждую из трех фигур, оно должно быть записано в таблице не меньше двух раз. Но тогда в таблице должно быть не меньше $2 \times 5 = 10$ записей, а клеток в ней только 9.

Решение 2. Предположим, удалось заполнить таблицу требуемым образом. Рассмотрим серый крестик II. В нём расставлены числа a, b, c, d ,

е из набора $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (разным буквам соответствуют разные числа из набора $\{1, 2, 3, 4, 5\}$). Посмотрим, какое из чисел может находиться в таблице в левой нижней клетке. Это не может быть а или d (числа из серой фигуры I должны быть различны), не может быть с или e (числа из серой фигуры III должны быть различны). Поэтому на этом месте может быть только число b. Тогда в правой верхней клетке не может быть а, b или d (числа из серой фигуры I должны быть различны), не может быть с или e (числа из серой фигуры III должны быть различны). То есть не может быть ни одной из цифр 1, 2, 3, 4, 5. Пришли к противоречию с тем, что удалось заполнить таблицу так, что в каждой серой фигуре встречаются все пять чисел. Значит, нельзя заполнить таблицу требуемым образом.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**. Показано, что в нижней левой или верхней правой клетке может быть только число, равное числу в центральной клетке, без дальнейших продвижений или с ошибочными выводами – **3 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.