

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
Рязанская область

7 класс

1. Сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками составляет 90^0 ?

Решение.

1 способ.

За сутки минутная стрелка делает 24 полных оборота, а часовая – два полных оборота. Следовательно, в течение суток минутная стрелка делает 22 полных оборота вокруг часовой стрелки, а поскольку положение, при котором угол между часовой и минутными стрелками составляет 90^0 , в ходе каждого такого оборота возникает ровно два раза. Получаем общее число таких положений за сутки равно 44.

2 способ.

В течение каждого часа, начиная с полуночи, минутная и часовая стрелки образуют угол 90^0 дважды, за исключением случаев, когда минутная стрелка указывает на 12. Если же минутная стрелка указывает на 12, то часовая при этом должна указывать либо на 3 либо на 9; это возможно 4 раза в сутки (в 3:00, 9:00, 15:00, 21:00). Таким образом, общее количество искомых положений равно $2 \cdot (24 - 4) + 4 = 44$.

Ответ: 44.

Комментарий: Только ответ – 0 баллов.

2. В мешке дедушки Мороза находится 40 одинаковых по форме конфет в разных по цвету обертках: 6 желтых, 14 красных и 20 зеленых. Миша, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько конфет. Какое максимальное количество конфет может взять Миша, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех конфет различных цветов?

Решение.

Если Миша возьмет 6 конфет и более, то, возможно, в корзине не останется ни одной конфеты в желтой обертке, следовательно, условие задачи не будет выполнено. Если Миша возьмет не более 5 конфет, то в мешке останется не менее трех конфет в обертках различных цветов. Таким образом, 5 конфет.

Ответ: 5 конфет.

3. В трех пакетах было 136 яблок. В первом пакете вдвое больше яблок, чем во втором, а во втором – на 8 яблок больше, чем в третьем. Каждое яблоко первого пакета стоит 3 рубля, в третьего – 5 рублей. Сколько стоит каждое яблоко второго пакета, если, смешав все яблоки и продавая каждое из них по 4 рубля, можно получить 8,8% прибыли по отношению к их стоимости?

Решение.

Если в пакетах было соответственно a , b и c яблок, тогда

$$a = 2b, b = c + 8, a = 2c + 16$$

Пусть x - стоимость одного яблока из второго пакета, тогда

$$(3a + 5c + xb)1,088 = 4(a + b + c)$$

Так как $a + b + c = 136$, то, подставив в данное уравнение

$$b = c + 8, a = 2c + 16, \text{ найдем } c = 28, a = 72, b = 36.$$

Получим $x=4$.

Ответ: 4 рубля.

4. Трехзначное число $\overline{ABC}$ делится на 3. Докажите, что сумма чисел $\overline{BCA}$ и $\overline{CAB}$ тоже делится на 3.

Решение.

1 способ. Представим $\overline{ABC}$ в виде:

$$\overline{ABC} = 100A + 10B + C$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\overline{BCA} + \overline{CAB} &= 100B + 10C + A + 100C + 10A + B = 101B + 110C + 11A \\ &= 111B - 10B + 111C - C + 111A - 100A \\ &= 111(A + B + C) - (100A + 10B + C)\end{aligned}$$

Поскольку $111=3 \cdot 37$ и число $\overline{ABC}$ делится на 3 (по условию), следовательно, сумма чисел $\overline{BCA}$ и $\overline{CAB}$ тоже делится на 3.

2 способ.

$$\overline{ABC} + \overline{BCA} + \overline{CAB} = 111(A + B + C), \text{ а } 111 = 3 \cdot 37$$

Комментарий: Приведен числовой пример, без доказательства – 1 балл.

5. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Например, на втором месте стоит число 14, так как $7^2=49$, а $4+9+1=14$. На третьем месте стоит число 17 и так далее. Какое число стоит на 2026-м месте?

Решение.

Вычислим несколько первых членов данной последовательности: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, 5,...

Таким образом, начиная с пятого члена последовательности, будет повторяться одна и та же тройка чисел 5, 8, 11. Так как $2026-4=2022$, 2022 кратно трем, то на 2026-м месте будет стоять число 11.

Комментарий: Установлена периодичность последовательности, но верный ответ не найден – 4 балла. За верный ответ без обоснования – 1 балл.