

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2025 – 2026 учебном году  
7 класс**

*Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут*

**7.1.** Математик Иванов на 6 лет старше своей жены программиста Ивановой. Однажды Иванов обнаружил, что ровно половину своей жизни он провел в браке с Ивановой. Ровно через 14 лет после этого Иванова обнаружила, что она провела в браке с Ивановым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет математику Иванову и программисту Ивановой, когда он и она отпразднуют золотую свадьбу — пятидесятилетие своей супружеской жизни? Ответ обоснуйте.

**Решение:** Пусть на момент времени, когда Иванов провёл в браке с Ивановой половину своей жизни, Иванову было  $2x$  лет. Тогда свадьба состоялась, когда ему было  $x$  лет, а Ивановой  $x - 6$ . Следовательно, на момент времени, когда Иванова пробыла замужем две трети своей жизни, ей было  $3(x - 6)$  лет, Иванову было  $3(x - 6) + 6 = 3x - 12$ , и, по условию задачи,  $3x - 12 = 2x + 14$ , откуда  $x = 26$ . Золотая свадьба будет отпразднована, когда Иванову будет  $x + 50 = 76$  лет, а Ивановой на 6 лет меньше, то есть 70.

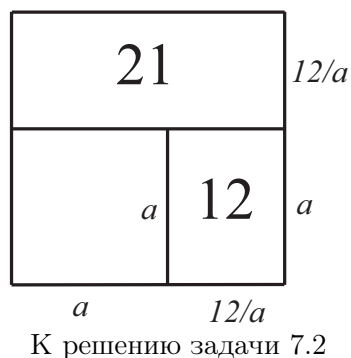
**Ответ:** 76 лет Иванову и 70 — Ивановой.

Рекомендации по проверке:

| Есть в работе                                                                                                     | Баллы    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верный обоснованный ответ                                                                                         | 7 баллов |
| Ход решения верен, но есть арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу                          | 6 баллов |
| Условие задачи верно записано с помощью уравнения (или системы уравнений), которое решено неверно (или не решено) | 3 балла  |
| Верный ответ с проверкой, что такая ситуация возможна (нет обоснования, что он единственный)                      | 1 балл   |
| Верный ответ без обоснования                                                                                      | 0 баллов |

**7.2.** От бумажного квадрата отрезали прямоугольник площади 21, а затем от оставшейся части квадрата еще отрезали прямоугольник площади 12. В результате появился маленький квадрат. Какова его площадь? Ответ обоснуйте.

**Решение:** Пусть длина стороны маленького квадрата  $a$ . Тогда вторым отрезанием был отрезан прямоугольник, одна из сторон которого  $a$  (см. рисунок). Его



площадь равна 12, поэтому вторая сторона равна  $\frac{12}{a}$ , а сторона исходного квадрата равна  $a + \frac{12}{a}$ . Значит, площадь отрезанного первый раз прямоугольника равна

$$\left(a + \frac{12}{a}\right)\left(a + \frac{12}{a} - a\right) = 21.$$

Отсюда  $a = 4$ , и площадь оставшегося квадрата равна 16.

**Ответ:** 16.

### Рекомендации по проверке:

| Есть в работе                                                                                                     | Баллы    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верный обоснованный ответ                                                                                         | 7 баллов |
| Условие задачи верно записано с помощью уравнения (или системы уравнений), которое решено неверно (или не решено) | 3 балла  |
| Верный ответ и верный пример квадрата с указанием разрезов                                                        | 1 балл   |
| Верный ответ без обоснования                                                                                      | 0 баллов |

**7.3.** В кружке конструкторов занимаются 40 школьников. У каждого из них есть болтики, винтики и гвоздики. Известно, что кружковцев, у которых количество гвоздиков не равно количеству болтиков, ровно 15 человек. Школьников, у которых количество винтиков равно количеству гвоздиков, ровно 10. Докажите, что есть не менее 15 школьников, у которых количество винтиков не равно количеству болтиков. Ответ обоснуйте.

**Решение:** Из 40 школьников кружка ровно у 15 количество гвоздиков не равно количеству болтиков. Рассмотрим остальных 25 кружковцев. У каждого из них гвоздиков и болтиков поровну. Если у кого-то из этих 25 винтиков и болтиков одинаковое количество, то у него поровну винтиков и гвоздиков. По условию таких школьников не может быть больше 10. Исключим их из рассмотрения. Остаётся по крайней мере 15 человек, у которых число винтиков не равно числу болтиков. Утверждение доказано.

Рекомендации по проверке:

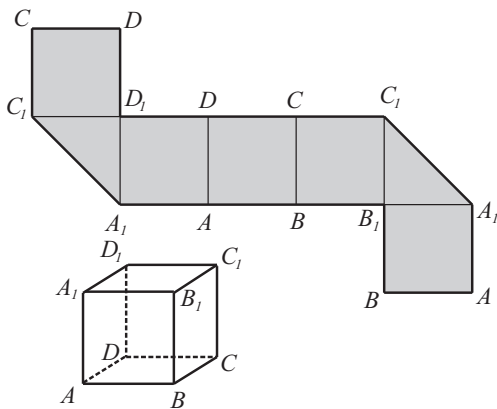
| Есть в работе                                                      | Баллы    |
|--------------------------------------------------------------------|----------|
| Верное доказательство                                              | 7 баллов |
| Доказано, что минимум у 25 школьников поровну гвоздиков и болтиков | 3 балла  |
| Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи          | 0 баллов |



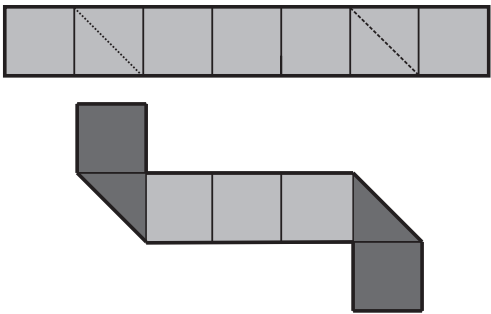
К условию задачи 7.4

**7.4.** Имеется полоска двустороннего скотча размером  $7\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Её можно как угодно перегибать, но нельзя рвать. Как полностью обклеить ею поверхность деревянного кубика с ребром  $1\text{ см}$ ? Укажите все места перегибов и развёртку полоски после них.

**Решение:** Одной из возможных развёрток куба является следующая (см. рисунок слева, сгибы идут по границам квадратов). Такую развёртку легко свернуть из полосы 1 на 7, перегибая второй и шестой квадрат по диагонали. (см. рисунок справа, для наглядности противоположные стороны полоски покрашены разными цветами).



К решению задачи 7.4, вид развёртки



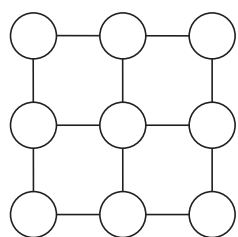
К решению задачи 7.4, места перегибов

Рекомендации по проверке:

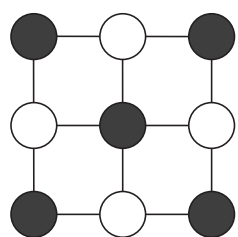
| Есть в работе                                                                                 | Баллы    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Приведена развёртка и показаны места перегибов ИЛИ есть верное объяснение, как обклеить кубик | 7 баллов |
| Примеры неверного обклеивания кубика                                                          | 0 баллов |

**7.5.** Девять ячеек соединены отрезками так, как показано на рисунке. В этих ячейках записаны все натуральные числа от 1 до 9 (по одному числу в ячейке), но неизвестно, в какой ячейке какое число стоит. За один ход разрешается

выбрать две ячейки, соединённых отрезком, и добавить к записанным в них числам по 1. Может ли случиться, что после нескольких операций все девять чисел, стоящих в ячейках, будут нацело делиться на 2025? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 7.5



К решению задачи 7.5

**Решение:** Раскрасим ячейки в «шахматном» порядке (см. рисунок) и заметим, что на каждом ходе сумма чисел, стоящих в чёрных ячейках увеличивается на ту же величину, что и сумма чисел в белых ячейках. Таким образом, разность этих сумм всё время остаётся неизменной (это инвариант задачи).

Если в какой-то момент времени все 9 чисел будут кратны числу 2025, то и упомянутая разность будет делиться на 2025 нацело. Но эта разность по модулю не превосходит числа

$$(9 + 8 + 7 + 6 + 5) - (1 + 2 + 3 + 4) = 25.$$

Значит, она обязана равняться нулю, то есть сумма чисел в белых ячейках должна быть равна сумме цифр в чёрных, что верно и для начальной позиции. Но тогда сумма чисел во всех ячейках должна быть чётна, в то время как на самом деле она равна 45.

Предположение, что числа во всех ячейках кратны 2025, привело к противоречию. Значит, этого не может быть.

**Ответ:** не может.

Рекомендации по проверке:

| Есть в работе                                                 | Баллы    |
|---------------------------------------------------------------|----------|
| Верный обоснованный ответ                                     | 7 баллов |
| Обнаружен инвариант — разность сумм в чёрных и белых ячейках  | 3 балла  |
| Приведено решение для нескольких конкретных расстановок чисел | 2 балла  |
| Верный ответ без обоснования                                  | 0 баллов |

**7.6.** Червяк считается взрослым, если его длина 1 метр. Взрослого червяка можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает 1 метра, он прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить десять взрослых червяков быстрее, чем за 1 час? Ответ обоснуйте. Не взрослых червей резать нельзя: обе части погибнут.

**Решение:**

Способ 1. Для удобства считаем, что резать начинаем в полночь, в 00 часов 00 минут. Отрежем от червяка  $\frac{1}{512}$ , и назовём большую часть базовой. Далее действуем

так: на отрезанную малую часть, равно как и все части, которые в дальнейшем будем отрезать от базовой, внимания не обращаем, дожидаясь пока базовая часть не станет взрослым червём и отрезаем от неё очередной кусок. Величины отрезаемых кусков каждый раз удваиваем. Так как скорость роста у всех кусков одна и та же, то время между последовательными отрезаниями тоже будет каждый раз увеличиваться вдвое. Первый раз базовой части надо нарастить  $\frac{1}{512}$  м, и на это уйдёт  $\frac{1}{512}$  часа. Во второй раз базовой части надо будет наращивать уже  $\frac{1}{256}$  м, и на это уйдёт  $\frac{1}{256}$  часа. Дальнейшие промежутки (в часах)  $\frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \dots, \frac{1}{4}$ . В этот момент делаем последний разрез, деля базовую часть пополам (при этом базовая часть дальше будет вести себя как последний отрезанный кусок). Всего сделано 9 разрезов, значит, получилось 10 кусков.  $n$ -ый по счёту отрезанный кусок ( $1 \leq n \leq 9$ ) был отрезан в

$$\underbrace{\frac{1}{512} + \frac{1}{256} + \dots}_{n-1 \text{ слагаемое}} = \frac{1}{512}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}) =$$

$$= \frac{1}{512}(2^{n-1} - 1) = -2^{-9} + 2^{n-10}$$

часов и имел на тот момент длину  $\frac{1}{2^{10-n}}$ . Для достижения взрослости ему требуется отрастить  $1 - \frac{1}{2^{10-n}}$  метров длины, и на это уйдёт  $1 - \frac{1}{2^{10-n}} = 1 - 2^{n-10}$  часа, следовательно, состояния взрослости он достигнет в момент времени (в часах)

$$1 - 2^{-9} + 2^{n-10} + 1 - 2^{n-10} = 1 - \frac{1}{512},$$

то есть все куски (включая базовый) достигнут взрослости в одно и то же время, чуть меньшее часа ночи.

**Примечание:** как ясно из решения, за 1 час можно вырастить любое наперёд заданное количество червей.

Способ 2. Покажем, как за час вырастить **любое** наперёд заданное количество червяков. Так как скорость роста любой отрезанной части одинакова, эта часть за  $t$  часов вырастает на  $t$  метров ( $0 \leq t \leq 1$ ) независимо от своей длины (или стабилизируется на длине 1 м, если достигнет за время  $t$  взрослого состояния).

Пусть мы хотим вырастить за час  $n$  червей. Тогда пропускаем  $\frac{1}{2^n}$  часа и отрезаем от взрослого червяка  $\frac{1}{2^n}$  метра. Отрезанный кусок за оставшиеся  $1 - \frac{1}{2^n}$  часа увеличится на  $1 - \frac{1}{2^n}$  и достигнет длины ровно 1 м. Большой кусок станет взрослым червем через  $\frac{1}{2^n}$  часа после отрезания, что составляет  $\frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$  часа с момента

отсчёта времени. Отрежем от него  $\frac{1}{2^{n-1}}$  метра. Опять меньшая часть достигнет метровой длины ровно через 1 час с начала отсчёта времени, а большая через  $\frac{1}{2^{n-2}}$  часа станет взрослым червём. Отрежем от неё  $\frac{1}{2^{n-1}}$  метра и т. д. Последний разрез делаем спустя полчаса, разрезая взрослого червя пополам. В итоге через час после начала каждая отрезаемая часть превратится во взрослого червя.

Способ 3. Пустим время вспять, то есть пусть, начиная, например, с часу дня, 10 червяков уменьшают свою длину с постоянной скоростью 1 метр в час каждый, а мы можем «склеивать» двух червяков в тот момент когда их суммарная длина станет равна 1 м. Наша цель — получить не позже, чем к полудню одного взрослого червяка. Тогда в 12-30 у нас останется 10 червяков длиной  $1/2$  м. Склеим двух из них — получим одного метрового червяка и 8 полуметровых. В 12-15 метровый червяк уменьшится до 75 см, а длины всех остальных станут равными 25 см. После склейки останутся один метровый червяк и семь 25-сантиметровых. Следующую склейку проведём в 12 часов 7 минут 30 секунд и т. д. Когда до 12-00 останется  $\frac{1}{512}$  часа, у нас и останется только один однометровый червяк.

**Ответ:** можно.

Рекомендации по проверке:

| Есть в работе                                                                                                         | Баллы    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Приведён верный алгоритм получения 10 червей и объяснено, почему черви станут взрослыми через час                     | 7 баллов |
| Приведён верный алгоритм получения 10 червей, но объяснение, почему он удовлетворяет условию, неверно или отсутствует | 5 баллов |
| Верный ответ без обоснования, а также любые утверждения, не ведущие к решению                                         | 0 баллов |