

КЛЮЧИ

Время выполнения заданий – 235 мин.

Максимальное количество первичных баллов – 35, итоговых – 100.

1. На доске написано число 10. С числом, написанным на доске, можно выполнить следующее действие: представить его в виде суммы трёх целых чисел, каждое из которых больше 1, затем эти три числа перемножить и записать результат умножения на доску вместо предыдущего числа. Затем с получившимся числом снова выполняется аналогичное действие и новое число записывается на доску вместо предыдущего и так далее. Можно ли через несколько действий получить на доске число 1000? Ответ обоснуйте.

Ответ: да, можно. Пример: $10 \xrightarrow{2 \cdot 3 \cdot 5} 30 \xrightarrow{10 \cdot 10 \cdot 10} 1000$.

Решение. Решим задачу методом обратного хода. Если из нового числа мы хотим получить предыдущее, то новое нужно представить в виде произведения трёх целых чисел, больших 1, и эти числа сложить. Начнём с числа 1000. Представим его в виде $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10$, тогда предыдущее равно $10 + 10 + 10 = 30$. Теперь представим 30 в виде $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, тогда предыдущее равно $2 + 3 + 5 = 10$.

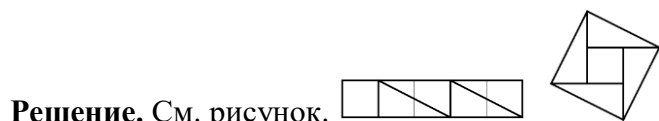
Замечание. Эта последовательность ходов единственная.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ с примером (достаточно одного примера) – 7 баллов.

Только ответ «да» без примера – 0 баллов.

2. Клетчатый прямоугольник 1×5 разрежьте на 5 частей, из которых можно сложить квадрат без зазоров и наложений (нужно использовать все части). Разрезы можно делать не только по сторонам клеток.



Возможны и другие симметричные варианты.

Критерии.

Приведены два верных чертежа (для разрезания и для составления) – 7 баллов.

Приведён только один верный чертёж (только для разрезания или только для составления) – 4 балла.

3. Малыш и Карлсон едят варенье каждый со своей неизменной скоростью. Если Малыш начинает есть банку варенья, а Карлсон присоединяется через 15 минут, то ещё через 15 минут варенье будет съедено. Если Карлсон начинает есть ту же самую банку варенья, а Малыш присоединяется через 10 минут, то ещё через 10 минут варенье будет съедено. Через сколько минут варенье будет съедено, если они начнут есть эту банку варенья одновременно?

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
7 класс

Ответ: через 18.

Решение. Возьмём банку варенья за условную единицу (у. е.). Пусть a у. е./мин и b у. е./мин – скорости поедания варенья Малыша и Карлсона соответственно. В первом случае Малыш съедает за 30 минут $30a$ у. е. варенья, а Карлсон за 15 минут съедает $15b$ у. е. варенья, что в сумме даёт 1 у. е., то есть

$$30a + 15b = 1.$$

Во втором случае Малыш съедает за 10 минут $10a$ у. е. варенья, а Карлсон за 20 минут съедает $20b$ у. е. варенья, что в сумме даёт 1 у. е., то есть

$$10a + 20b = 1.$$

Поделив первое равенство на 15, второе на 10 и сложив их, получим $(2a + b) + (a + 2b) = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$, то есть $3(a + b) = \frac{1}{6}$, следовательно, $a + b = \frac{1}{18}$, а, значит, вместе они съедают одну банку за 18 минут, если начинают одновременно.

Замечание. Можно было из системы найти a и b по отдельности, они равны $\frac{1}{90}$ и $\frac{2}{45}$ соответственно.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно получена система уравнений для нахождения a и b , но не решена – 3-4 балла.

Верно получена система уравнений для нахождения a и b , но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 5-6 баллов.

4. Решите числовой ребус: $\overline{ab} \cdot c = \overline{bac}$ (запись вида $\overline{abc}$ означает число, в десятичной записи которого слева направо следуют цифры a , b и c). Разным буквам могут соответствовать одинаковые цифры. Укажите все возможные решения, объясните, как вы нашли неизвестные и почему нет других решений.

Ответ: $a = 5, b = 1, c = 3$, или $a = 2, b = 1, c = 6$, или $a = 8, b = 6, c = 8$.

Решение. Очевидно, что $c \geq 2, a, b \geq 1$.

Если $c = 2$, то $\overline{ab} \cdot 2 = \overline{ba2}$. Так как $\overline{ab} \cdot 2 \leq 99 \cdot 2 = 198$, то $\overline{ba2} \leq 198$, то есть $b = 1$. Тогда $\overline{ab} = 10a + b = 10a + 1, \overline{ba2} = 100b + 10a + 2 = 10a + 102$. Имеем уравнение $2(10a + 1) = 10a + 102$, то есть $10a = 100, a = 10 > 9$ – не подходит.

Если $c = 3$, то $\overline{ab} \cdot 3 = \overline{ba3}$. Тогда $3b$ должно оканчиваться на 3. Это возможно только при $b = 1$. Тогда имеем уравнение $3(10a + 1) = 10a + 103$, то есть $20a = 100, a = 5$ – подходит.

Если $c = 4$, то $\overline{ab} \cdot 4 = \overline{ba4}$. Тогда $4b$ должно оканчиваться на 4. Это возможно только при $b = 1$ и $b = 6$. Второй случай невозможен, так как из условия $\overline{ab} \cdot 4 \leq 99 \cdot 4 = 396$ следует, что $b \leq 3$. При $b = 1$ имеем уравнение $4(10a + 1) = 10a + 104$, то есть $30a = 100, a = \frac{10}{3}$ – не подходит.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
7 класс

Если $c = 5$, то $\overline{ab} \cdot 5 = \overline{ba5}$. Тогда $5b$ должно оканчиваться на 5. Это возможно только при нечётном b . Из условия $\overline{ab} \cdot 5 \leq 99 \cdot 5 = 495$ следует, что $b \leq 4$. При $b = 1$ имеем $5(10a + 1) = 10a + 105$, то есть $40a = 100$, $a = \frac{5}{2}$ – не подходит. При $b = 3$ имеем $5(10a + 3) = 10a + 305$, то есть $40a = 290$, $a = \frac{29}{4}$ – не подходит.

Если $c = 6$, то $\overline{ab} \cdot 6 = \overline{ba6}$. Тогда $6b$ должно оканчиваться на 6. Это возможно только при $b = 1$ и $b = 6$. Второй случай невозможен, так как из условия $\overline{ab} \cdot 6 \leq 99 \cdot 6 = 594$ следует, что $b \leq 5$. При $b = 1$ имеем уравнение $6(10a + 1) = 10a + 106$, то есть $50a = 100$, $a = 2$ – подходит.

Если $c = 7$, то $\overline{ab} \cdot 7 = \overline{ba7}$. Тогда $7b$ должно оканчиваться на 7. Это возможно только при $b = 1$. Имеем уравнение $7(10a + 1) = 10a + 107$, то есть $60a = 100$, $a = \frac{5}{3}$ – не подходит.

Если $c = 8$, то $\overline{ab} \cdot 8 = \overline{ba8}$. Тогда $8b$ должно оканчиваться на 8. Это возможно только при $b = 1$ и $b = 6$. При $b = 1$ имеем уравнение $8(10a + 1) = 10a + 108$, то есть $70a = 100$, $a = \frac{10}{7}$ – не подходит. При $b = 6$ имеем уравнение $8(10a + 6) = 10a + 608$, то есть $70a = 560$, $a = 8$ – подходит.

Если $c = 9$, то $\overline{ab} \cdot 9 = \overline{ba9}$. Тогда $9b$ должно оканчиваться на 9. Это возможно только при $b = 1$. Имеем уравнение $9(10a + 1) = 10a + 109$, то есть $80a = 100$, $a = \frac{5}{4}$ – не подходит.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ (найжены все 3 варианта, перебор полный) – 7 баллов.

За каждый найденный вариант при неполном переборе даётся по 2 балла.

Только ответ без решения – 1 балл.

5. Имеется банка, содержащая 1 кг сахара, чашечные весы без гирь и два пустых ведра, массы которых равны 800 г и 950 г. Как с их помощью отсыпать из банки ровно полкилограмма сахара? Сахар можно сыпать только в имеющиеся вёдра и банку. Высыпать сахар непосредственно на чаши весов, а также в другие ёмкости или на другие поверхности нельзя. Весы могут только показывать равновесие, то есть чаши весов будут находиться на одном уровне, если на чашах находятся одинаковые массы. Массу продукта весы не показывают. Масса банки неизвестна. Уравновешивать чаши весов можно добавляя сахар только на одну чашу, уравновешивать пересыпанием с одной чаши на другую нельзя.

Решение. На левой чаше весов будет постоянно находиться ведро массой 800 г (первое), на правой – ведро массой 950 г (второе). Выполним следующие действия.

- 1) Пересыпем из банки столько сахара в первое ведро, чтобы чаши весов уравновесились. Тогда в первом ведре будет 150 г сахара, в банке – 850 г.
- 2) Пересыпем весь сахар из первого ведра во второе и досыпем в освободившееся первое ведро сахара из банки до равновесия. Тогда в первом ведре будет 300 г сахара, во втором – 150 г, в банке – 550 г.
- 3) Пересыпем весь сахар из второго ведра в первое и досыпем в освободившееся второе ведро сахара из банки до равновесия. Тогда в первом ведре будет 450 г сахара, во втором – 300 г, в банке – 250 г.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
7 класс**

4) Пересыпем весь сахар из второго ведра в первое, затем весь сахар из банки во второе ведро, потом весь сахар из первого ведра в банку. После этого досыпем в освободившееся первое ведро сахара из банки до равновесия. Тогда в первом ведре будет 400 г сахара, во втором – 250 г, в банке – 350 г.

5) Пересыпем весь сахар из второго ведра в первое, затем весь сахар из банки во второе ведро, потом весь сахар из первого ведра в банку. После этого досыпем в освободившееся первое ведро сахара из банки до равновесия. Тогда в первом ведре будет 500 г сахара, во втором – 350 г, в банке – 150 г.

Замечание. Возможна другая последовательность действий.

Критерии.

Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов.

Приведено решение, использующее запрещённое в условии действие, или с дополнительным условием на массу банки – 0 баллов.