

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

7 класс

1. Найти произведение натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$3\frac{x}{5} \cdot 3\frac{3}{y} - \frac{1}{2} = 13.$$

РЕШЕНИЕ.

1 способ. Пусть $x = 1$, тогда получим уравнение $3\frac{1}{5} \cdot 3\frac{3}{y} - \frac{1}{2} = 13$. Решение этого уравнения не является натуральным числом ($y = \frac{32}{13} \notin N$).

Пусть $x = 2$, тогда получим уравнение $3\frac{2}{5} \cdot 3\frac{3}{y} - \frac{1}{2} = 13$. Решение этого уравнения не является натуральным числом ($y = \frac{34}{11} \notin N$).

Пусть $x = 3$, тогда получим уравнение $3\frac{3}{5} \cdot 3\frac{3}{y} - \frac{1}{2} = 13$. Решение этого уравнения является натуральным числом ($y = \frac{36}{9} = 4 \in N$).

Таким образом, можно заметить последовательность $\frac{32}{13}, \frac{34}{11}, \frac{36}{9}$ и продолжить данный ряд $\frac{38}{7}, \frac{40}{5}, \frac{42}{3}, \frac{44}{1}$ соответствующий значениям $x = 4, 5, 6, 7$.

Итак, получаем натуральные решения: (3,4), (5,8), (6,14), (7, 44).

Их произведения: 12, 40, 84, 308. Можно сделать проверку!

2 способ. Запишем уравнение в виде: $3\frac{x}{5} \cdot 3\frac{3}{y} = \frac{27}{2}$.

При минимальных натуральных значениях ($x = y = 1$) левая часть будет равна $\frac{96}{5} > \frac{27}{2}$. Выражение будет уменьшаться за счет значительного увеличения значения y , т.е. $x < y$. Из выражения видно, что $x \geq 3$.

Преобразуем искомое уравнение: $\left(3 + \frac{x}{5}\right) \cdot \left(3 + \frac{3}{y}\right) = \frac{27}{2}$
 $9 + \frac{3x}{5} + \frac{9}{y} + \frac{3x}{5y} = \frac{27}{2}$

Умножив на $10y$ обе части уравнения, разделив на 3, выразим x .

$$x = \frac{15y - 30}{y + 1}$$

Решив неравенство $\frac{15y-30}{y+1} \geq 3$ получаем, что $y \geq 4$.

Первое решение (3,4), а их произведение равно 12.

Далее подставляем значения $x = 4, 5, 6, 7$. После подстановки числа 7, видно, что дальше нет необходимости проверять другие значения.

Итак, получаем натуральные решения: (3,4), (5,8), (6,14), (7, 44).

Их произведения: 12, 40, 84, 308. Можно сделать проверку!

ОТВЕТ: 12, 40, 84, 308.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

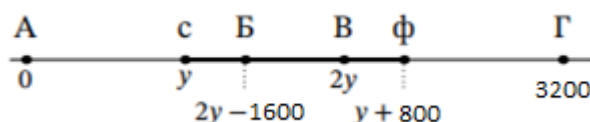
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности (например, не указано явно, что полученные значения неизвестных не являются натуральными числами, но вычисления логичны).
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная вычислительная ошибка.
4	Дан верный ответ, решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но общая структура решения верна ИЛИ найдены все пары натуральных чисел, но в ответе не указаны их произведения.
3	Дан верный ответ, но ясного обоснования решение не содержит.
2	Приведены идеи для решения, но не доведены до конца.
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований.
0	Решение отсутствует или решение показывает незнание соответствующего материала.

2. Вдоль дороги стоят дома Анны, Бори, Васи и Гали (именно в таком порядке). Расстояние между домами Анны и Гали равно 3200 метрам. Однажды ребята решили устроить забег на 800 м. Они поставили старт на полпути от дома Анны до дома Васи. При этом финиш оказался ровно на полпути от дома Бори до дома Гали. Чему равно расстояние от дома Бори до дома Васи? Ответ укажите в метрах.

РЕШЕНИЕ.

1 способ. Введем координатную прямую, и обозначим координату дома Анны как А, координату дома Васи как В, координату дома Бори как С, а координату дома Гали как D. Дорога идет от дома Анны на восток к дому Гали; тогда мы можем сказать, что дом Гали восточнее дома Васи, а дом Бори восточнее дома Анны. Это означает, что финиш (середина между домами Бори и Гали) восточнее старта (середина между домами Анны и Васи).

Пусть старт находится на расстоянии y метров к востоку от дома Анны, тогда финиш – на расстоянии $y + 800$.



Если расстояние от дома Бори до дома Анны обозначить за b , то разность $(y + 800) - b$

равна расстоянию от дома Гали до финиша. Они равны:

$$(y + 800) - b = 3200 - (y + 800)$$

откуда нетрудно извлечь $b = 2y - 1600$.

С другой стороны, расстояние от дома Васи до дома Анны равно $2y$, так как старт находится посередине между ними. Это означает, что расстояние от дома Васи до дома Бори 1600.

2 способ. Пусть А,Б,В,Г - это координаты домов Анны, Бори, Васи и Гали соответственно.

Расстояние между домами Анны и Гали равно $Г - А = 3200$ м.

Старт (СТ) забега находится на полпути от дома Анны до дома Васи, то координата старта $СТ = (А + В) / 2$.

Финиш (Ф) забега находится на полпути от дома Бори до дома Гали.

$$Ф = (Б + Г) / 2$$

Длина забега равна 800 м, тогда $Ф - СТ = 800$ м.

Подставляются выражения для СТ и Ф в уравнение для длины забега:

$$(Б + Г) / 2 - (А + В) / 2 = 800$$

Уравнение умножается на 2

$$(Б + Г) - (А + В) = 1600$$

$$(Г - А) + (Б - В) = 1600$$

Вычислим расстояние от дома Бори до дома Васи:

$$Б - В = 1600 - 3200 = -1600.$$

Расстояние между домами Бори и Васи

$$|Б - В| = |-1600| = 1600 \text{ м.}$$

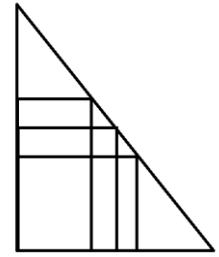
Тогда расстояние от дома Бори до дома Васи равно 1600 м.

ОТВЕТ: 1600

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности (например, не указано явно, что координаты можно ввести, но вычисления логичны).
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная вычислительная ошибка.
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но общая структура решения верна.
3	Верно составлена математическая модель, но участник не смог продвинуться дальше к решению ИЛИ дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
2	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца, общая математическая модель не построена
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении или приведен ответ без решения.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

3. Дан прямоугольный треугольник. В него вписывают прямоугольники так, что две стороны каждого прямоугольника лежат на катетах треугольника, а одна из вершин – на гипотенузе.



Каково соотношение между сторонами прямоугольного треугольника, если известно, что периметры всех таких вписанных прямоугольников одинаковы?

РЕШЕНИЕ.

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a и b , и гипотенузой $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. В него вписываются прямоугольники так, что две стороны лежат на катетах, а одна вершина – на гипотенузе.

Пусть прямоугольник имеет стороны x и y , где x – длина по катету a , y – по катету b . Тогда его вершина, лежащая на гипотенузе, имеет координаты (x, y) , если поместить начало координат в прямой угол треугольника, а катеты – по осям.

Уравнение гипотенузы:

$$x/a + y/b = 1$$

(это уравнение прямой, проходящей через точки $(a, 0)$ и $(0, b)$).

Таким образом, для любого вписанного прямоугольника с вершиной на гипотенузе выполняется условие:

$$x/a + y/b = 1.$$

Периметр прямоугольника: $P = 2(x + y)$

По условию, периметры всех таких прямоугольников одинаковы. То есть величина $x + y$ постоянна при всех x, y , удовлетворяющих уравнению $x/a + y/b = 1$.

Но это возможно только если множество точек (x, y) , удовлетворяющих этому уравнению, лежит на прямой $x + y = \text{const}$. А это возможно только тогда, когда прямые:

$$x/a + y/b = 1 \text{ и } x + y = C$$

совпадают (или параллельны, но тогда пересечение – пустое множество или одна точка, что не подходит).

Значит, прямые должны быть одинаковыми, то есть их коэффициенты пропорциональны.

Запишем уравнение гипотенузы в виде:

$$bx + ay = ab$$

$$x + y = C$$

Чтобы эти два уравнения задавали одну и ту же прямую, коэффициенты должны быть пропорциональны:

$$b/1 = a/1 = ab/C$$

Из первого равенства получаем, что $b = a$

То есть треугольник – равнобедренный прямоугольный треугольник.

Проверим: если $a = b$, то уравнение гипотенузы:

$$x/a + y/a = 1 \Rightarrow x + y = a$$

Тогда периметр прямоугольника:

$$P = 2(x + y) = 2a = \text{const}$$

Все прямоугольники, вписанные таким образом, имеют одинаковый периметр – $2a$.

Катеты треугольника должны быть равны между собой.

Если катеты равны a , то гипотенуза равна $c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора).

Соотношение сторон:

$$a : a : a\sqrt{2} = 1 : 1 : \sqrt{2}.$$

ОТВЕТ: Соотношение сторон треугольника $a : a : a\sqrt{2} = 1 : 1 : \sqrt{2}$.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение.
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности.
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная вычислительная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно; или имеются погрешности в применении символики и терминологии
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3	Верно составлена математическая модель, но участник не смог продвинуться дальше к решению ИЛИ дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
2	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца, общая математическая модель не построена
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении или приведен ответ без решения.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

4. Натуральное шестизначное число n будем считать «особенным», потому что разность числа n и числа, составленного из его цифр стоящих на четных местах ($123456 - 246 = 123210$), делится на 9. Сколько таких «особенных» чисел существует?

РЕШЕНИЕ.

Обозначим «особенное» число $\overline{abcdef}$.

Тогда его «особенность» будет иметь вид:

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f - (b \cdot 10^2 + d \cdot 10 + f).$$

Для того чтобы разность делилась на 9, сумма цифр числа n минус сумма цифр числа $\overline{bdf}$ должна делиться на 9:

$$a + b + c + d + e + f - (b + d + f) = a + c + e$$

Комментарий. Можно преобразовать «особенность» чисел, раскрыв скобки и приведя подобные:

$$\begin{aligned} a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f - (b \cdot 10^2 + d \cdot 10 + f) \\ = a \cdot 10^5 + b \cdot 9900 + c \cdot 10^3 + d \cdot 90 + e \cdot 10 \end{aligned}$$

Очевидно, что второе и четвертое слагаемые делятся на 9.

Таким образом, сумма цифр на нечетных местах $a + c + e$ должна делиться на 9. Каждая из цифр a, c, e может принимать значения от 0 до 9, но a не может быть 0, так как n – шестизначное число.

Рассмотрим все возможные значения для $a + c + e$:

1. $a + c + e = 9$

2. $a + c + e = 18$

Легко проверить, что другие значения не имеет смысла рассматривать!

Для каждого из этих случаев нужно посчитать количество возможных комбинаций (a, c, e) .

1. Случай $a + c + e = 9$:

- a может быть от 1 до 9.
- Для каждого a нужно найти количество решений $c + e = 9 - a$ в неотрицательных целых числах.
- Количество решений $c + e = k$ (где $k = 9 - a$) равно $k + 1$ (от 0 до k).

Суммируем количество решений для всех a :

$$\sum_{a=1}^9 (10 - a) = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$

Комментарий. Здесь можно найти сумму, построив дерево решений или таблицу возможных значений.

2. Случай $a + c + e = 18$:

- a может быть от 9 до 9.
- Для $a = 9, c + e = 9$.
- Количество решений $c + e = 9$ равно 10 (от 0 до 9).

Суммируем количество решений: 10

Теперь рассмотрим цифры b, d, f , которые могут быть любыми от 0 до 9. Для каждого случая $a + c + e = 9$ или $a + c + e = 18$ у нас есть $10^3 = 1000$ возможных комбинаций для b, d, f .

Итого, общее количество «особенных» чисел:

$$45 \cdot 1000 + 10 \cdot 1000 = 45000 + 10000 = 55000$$

ОТВЕТ: 55000

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности (например, не указано, что значения цифр a, c, e может принимать значения от 0 до 9, но рассуждения логичны).
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется не принципиальная вычислительная ошибка.
4	Ход решения верный, но рассмотрен только один случай $a + c + e = 9$.
3	Дан верный ответ, но ясного обоснования решение не содержит.
2	Приведены идеи для решения, но не доведены до конца.
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований.
0	Решение отсутствует или решение показывает незнание соответствующего материала.

5. У князя было три дочери Аленушка, Мария и Василиса: одна из них была, красивой, другая – умной, а третья – доброй. Отец любил всех троих одинаково и не знал, кого первой выдать замуж, чтобы никого не обидеть. Когда пришли женихи Аленушка сказала: «Василиса краше меня, пусть выходит первой», Мария возразила: «Я умнее Василисы, замуж первой пойду я», а Василиса отметила: «Мария умнее меня».

Известно, что самая красивая и самая добрая сказали правду, а самая умная соврала, и среди них нет двух дочерей, равных по красоте. Верно ли, что среди трёх дочерей та, что самая добрая, далеко не красавица? Обоснуйте свой ответ.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим: А – Аленушка, М – Мария, В – Василиса.

Утверждения М и В повторяют друг друга, а так как имеется только одно неверное утверждение среди трёх, М и В сказали правду, А – ложь. Следовательно, А самая умная (по условию), А краше В (так как А соврала) и М умнее В (так как М и В сказали правду). Раз А краше В, то В не самая красивая. Получается, что самая красивая М, средний по красоте А, далеко не красавица – В. При этом В не самая умная и не самая красивая, значит, она самая добрая.

Для наглядности можно занести имеющуюся информацию в таблицу. Будем обозначать «места» каждого качества: 1 – первое место (самая умная / красивая / добрая), 2 – среднее, 3 – последнее место.

	умная	красивая	добрая
А	1	2	
М		1	
В		3	1

Из таблицы видно, что В — самая добрая и далеко не красавица.

Комментарий. Решение может быть приведено без таблицы, но посредством логических умозаключений

ОТВЕТ: Да

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Верно и обоснованно найдено, кто самая красивая, кто самая умная и кто самая добрая, а дальше продвижений нет
5	Обоснованно получено, Аленушка самая умная, верно распределены дочери по красоте (все 3 места), но не получено или не соотнесено с тем, что Василиса самая добрая.
4	Приведены рассуждения только для частного случая (например, рассмотрен только случай, что Аленушка сказала неправду) без рассмотрения остальных частных случаев и без указания на их невозможность
3	Верный ответ с указанием, кто самая умная, кто самая красивая и кто самая добрая, с проведённой проверкой, что при такой расстановке все условия задачи выполнены, но без обоснований.
2	В самом начале рассуждений допущена ошибка, но дальнейшие рассуждения имеют место быть.
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований.
0	Решение отсутствует.