

Решения задач, 7 класс

7.1. Дано двузначное число $\overline{ab}$, сумма цифр которого в пять раз меньше самого числа. Найдите все такие двузначные числа. Ответ поясните.

Ответ. 45.

Решение. Пусть $n = \overline{ab}$. Из условия $10a + b = 5(a + b)$ следует, что $5a = 4b$, поэтому b делится на 5. Таким образом, $b = 5$, так как если $b = 0$, то и $a = 0$.

□

7.2. В некоторых странах дату записывают так: номер месяца, номер дня, год. В России сначала идёт число, потом месяц и год. Посчитайте количество дней года, дату которых нельзя прочесть однозначно, не зная, каким способом она записана?

Ответ. 132.

Решение. Заметим, что это те дни, у которых дата может быть номером месяца, то есть принимать значения от 1 до 12. Таким дней $12 \cdot 12 = 144$. Но дни, у которых число совпадает с номером месяца, понимаются однозначно. Таких дней ровно 12. Следовательно, искомых дней $144 - 12 = 132$.

□

7.3. Может ли разность двух чисел вида $n^2 + 4n$ (n – натуральное число), равняться 2026?

Ответ. Не может.

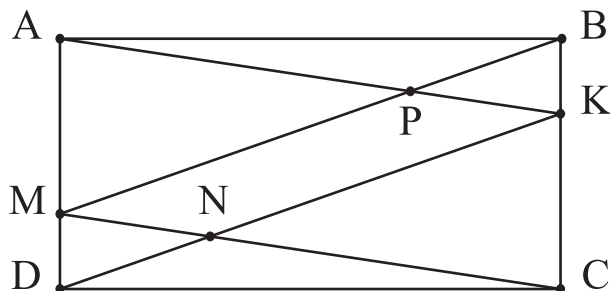
Решение. Если $X = n^2 + 4n$, а $Y = m^2 + 4m$, то $X - Y = (n - m)(n + m + 4)$. Но числа в скобках – одинаковой чётности, а их произведение не может быть равно $2026 = 2 \cdot 1013$.

□

7.4. Дан прямоугольник $ABCD$. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ взята точка K , а на стороне AD взята точка M так, что $BK = DM$. Отрезки AK и BM пересекаются в точке P , а отрезки DK и CM – в точке N . Докажите, что треугольники PAB и NCD равны.

Ответ. Не может.

Решение.



Из равенства треугольников ABK и CDM получаем, что $\angle BAK = \angle DCM$. Из равенства треугольников BAM и DCK следует равенство $\angle MBA = \angle KDC$.

Таким образом, $\angle BAP = \angle DCN$ и $\angle PAB = \angle NDC$.

□

7.5. На доске написано число 123456789. У написанного числа выбираются две соседние цифры, если ни одна из них не равна нулю, из каждой вычитается по единице, и выбранные цифры меняются местами (например, $123456789 \rightarrow 123436789 \rightarrow \dots$). Какое наименьшее число может быть получено в результате таких операций?

Ответ. 101010101.

Решение. Можно заметить, что при указанных операциях на нечётных местах всегда будут стоять нечётные цифры, а на чётных – чётные, так как при вычитании 1 чётность чисел меняется на противоположную, а перестановка их местам приводит к исходной чётности. Тогда, на всех чётных местах стоит цифра, не меньшая 1, и поэтому наименьшим может быть только число 101010101.

Проверим, что полученное число получено указанными операциями:

- a) 8 операций понадобится на получения 01 для последних двух цифр;
- b) 6 операций превратит две предыдущие цифры (67) в 01;
- c) 4 операции для пары (45);
- d) 2 операции превратят в 01 пару (23).

□