

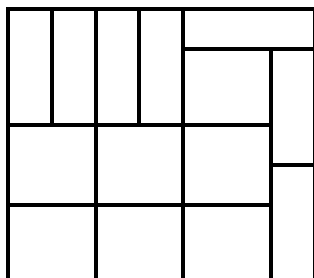
Решения

7 класс

1. **Ответ:** можно. **Решение.** Например, $(1 + (2 - 3 + 4 - 5 + 6) \cdot 7 \cdot 8) \cdot 9 = 2025$. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Один из возможных путей поиска решения (предъявлять его участник олимпиады не обязан): так как 2025 делится на 9, достаточно из чисел 1 2 3 4 5 6 7 8 составить $2025 : 9 = 225$. Число 225 нечётно, поэтому после вычитания 1 можно сделать его чётным. Итак, достаточно из чисел 2 3 4 5 6 7 8 составить $225 - 1 = 224$. Так как 224 делится на 7 и на 8, достаточно из чисел 2 3 4 5 6 составить $224 : 7 : 8 = 4$.

2. **Ответ:** можно. **Решение.** Пусть имеется k частей того и другого вида. Площади квадрата 2×2 и прямоугольника 1×3 равны соответственно 4 и 3, поэтому суммарная площадь частей $4k + 3k = 7k$ делится на 7. А значит, сторона квадрата делится на 7. Зная, каким может быть квадрат, осталось найти нужное разрезание (например, см. рисунок).



3. **Ответ:** разность масс гирь на чашах весов будет равна 5 граммам. **Решение.** Стратегия Ани – брать самую тяжёлую из оставшихся на столе гирь и класть её на левую чашу весов. Тогда первым ходом Аня поместит на левую чашу гирь массой 10 граммов; вторым ходом – гирю массой не менее 8 граммов (так как из гирь, имеющих массы 8 и 9 граммов, Боря возьмёт к этому времени не больше одной); третьим ходом – гирю не меньше 6 граммов (так как за предыдущие ходы будут взяты четыре гири, и по крайней мере одна из пяти гирь, имеющих массы не менее 6 граммов, останется). Рассуждая аналогично, получим, что Аня поместит на левую чашу весов гири, имеющие суммарную массу не менее $10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 30$ граммов, в то время как масса всех гирь 55 граммов. Поэтому на правой чаше окажутся гири с массой не более 25 граммов, и будет достигнута разность не менее $30 - 25 = 5$ граммов.

Стратегия Бори – распределить гири в следующие 10 пар (указана масса в граммах): 1 – 2, 3 – 4, 5 – 6, 7 – 8, 9 – 10. В ответ на любой ход Ани Боря помещает гирю из той же пары, что и Аня, на чашу весов, противоположную той, куда только что поместила гирю Аня. Тогда за каждую пару ходов (ход Ани и ответный ход Бори) разность между массами гирь на левой и правой чашах изменится в ту или иную сторону на 1 грамм. Так как пар ходов 5, то не может накопиться разность более, чем 5 граммов.

4. **Ответ:** не могло. **Решение.** Так как правду могли сказать только рыцари, далее будем рассматривать рыцарей; выясним, могло ли оказаться так, что рыцарей за столом ровно половина от числа присутствующих. Пусть рыцарь R_1 сказал про R_2 , что тот рыцарь; тогда R_2 действительно рыцарь (причём ближайший справа от R_1). В свою очередь, R_2 сказал про R_3 , что тот рыцарь, и т.д. В цепочке рыцарей $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow \dots \rightarrow R_n \rightarrow \dots$ обязательно кто-то повторится (потому что можно выписать цепочку, включающую больше рыцарей, чем всего присутствующих за столом); таким образом, имеется цикл, состоящий из рыцарей (возможно, проходя цикл, мы сделаем не один, а несколько оборотов вокруг стола); рассмотрим далее этот цикл.

Вспомним, что каждый рыцарь сказал про ближайшего справа рыцаря (а не про какого-нибудь другого). Из этого следует, что за круглым столом нет рыцарей между R_1 и R_2 ; нет их и между R_2 и R_3 и т.д. Но тогда, пройдя мимо R_1 тогда, когда мы, двигаясь по циклу, прошли один оборот вокруг стола, мы уже выписали всех рыцарей. Поэтому оборот ровно один, и никаких других рыцарей, кроме находящихся в цикле, за столом нет.

Разделим присутствующих за столом на группы; каждая группа начинается с очередного рыцаря, выписанного в цепочке выше, и заканчивается человеком, сидящим перед следующим рыцарем в цепочке. В группе либо 3, либо 5 человек. Поэтому количество рыцарей в цикле не менее, чем пятая часть и не более, чем треть от количества присутствующих за столом. А значит, меньше, чем половина от присутствующих.

5. **Ответ:** $E = 8$, $H = 7$, $W = 6$. **Решение.** Равенство можно переписать так: $HE \cdot EH = 1001 \cdot W + 10 \cdot HE$. Поскольку $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то получаем $HE \cdot (EH - 10) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot W$. Так как цифры H и E разные, то число HE не делится на 11. Следовательно, на 11 делится разность $(EH - 10)$, а это значит, что $E = H + 1$. Кроме того, отсюда следует, что $(EH - 10)$ не делится на 13 (иначе это двузначное число делилось бы на произведение 11 и 13), поэтому на 13 делится второй множитель, HE , который представляет собой двузначное число, записанное двумя последовательными цифрами. Такое число единственное – это 78. Итак, $E = 8$, $H = 7$.

Из равенства $78 \cdot (87 - 10) = 1001 \cdot W$ делаем вывод, что $W = 78 \cdot 77 : 1001 = 6$.