

8 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Три положительных числа таковы, что если из одного вычесть двойку, ко второму прибавить двойку, а третье возвести в квадрат, то получится первоначальный набор трёх чисел. Из каких трёх чисел состоит набор, если их сумма 2025?

Ответ: 1013, 1011, 1.

Решение: Если обозначить неизвестные три числа как x, y и z , то после изменения получим тройку чисел $(x - 2), (y + 2), z^2$. Так как набор чисел не изменился, то и сумма трёх чисел в наборе не изменилась, а значит $x + y + z = (x - 2) + (y + 2) + z^2$, откуда получим, что $z = z^2$ и единственное положительное число равное своему квадрату есть единица, то есть $z = 1$ и тогда сумма чисел $x + y = 2024$. Переберём варианты возможных равенств между числами из набора. Для каждого варианта проверяем выполнение всех условий. Остаётся один возможный вариант (первые два числа после преобразования меняются местами): $x - 2 = y$. Вместе с условием $x + y = 2024$ получим единственную тройку требуемых чисел: $x = 1013, y = 1011, z = 1$.

Критерии: Полное обоснованное решение (с перебором всех возможных вариантов) и верный ответ – 7 баллов. Просто верный ответ без решения и обоснования (например, просто проверено выполнение условий) – 2 балла.

2. Лёня придумал новую функцию, которая для заданного натурального числа выдаёт количество всех натуральных чисел, меньших заданного и взаимно простых с ним. Какое значение функция Лёни выдаст для аргумента 935?

Ответ: 640.

Решение: Число 935 состоит из трёх простых сомножителей: $935 = 5 \cdot 11 \cdot 17$. Тогда все числа, меньшие 935, не кратные хотя бы одному из 5, 11 или 17 будут взаимно просты с 935. Подсчитаем количество таких чисел, кратных 5, 11 или 17, а также их парным комбинациям ($5 \cdot 11$, $5 \cdot 17$ и $11 \cdot 17$).

Для подсчёта всех таких чисел используем формулу включения-исключения для суммы трёх попарно пересекающихся множеств чисел. Обозначим множество натуральных чисел кратных 5 и меньших 935 как A_5 , а количество таких чисел $M(A_5)$. Количество таких чисел среди первых 935 чисел равно $935:5 = 187$, а значит, меньших, чем 935 – ровно 186 штук. Аналогично, для чисел, кратных 11 – множество B_{11} и количество таких чисел $M(B_{11}) = 935:11 - 1 = 84$. Для чисел, кратных 17 – множество C_{17} и количество таких чисел $M(C_{17}) = 935:17 - 1 = 54$. Теперь, количество чисел, кратных $5 \cdot 11$ – их $935:55 - 1 = 16$ штук, кратных $5 \cdot 17$ – их $935:85 - 1 = 10$ штук, кратных $11 \cdot 17$ – их $935:187 - 1 = 4$ штуки. Заметим, что все три множества A_5 , B_{11} и C_{17} в пересечении не имеют общих элементов(самое первое было бы 935). Формула включения-исключения даёт:

$$\begin{aligned} M(A_5 \cup B_{11} \cup C_{17}) &= M(A_5) + M(B_{11}) + M(C_{17}) - M(A_5 \cap B_{11}) - \\ &- M(A_5 \cap C_{17}) - M(B_{11} \cap C_{17}) + M(A_5 \cap B_{11} \cap C_{17}) = \\ &= 186 + 84 + 54 - 16 - 10 - 4 + 0 = 294. \end{aligned}$$

Итого, 294 числа из первых 934 натуральных чисел имеют общие множители с числом 935. Значит, взаимно простых с числом 935 всего $934 - 294 = 640$ чисел.

Заметим, что приведённая функция Лёни известна в теории чисел как функция Эйлера $\varphi(n)$. Одним из известных свойств функции Эйлера является мультипликативность: для двух взаимно простых чисел m и n верно: $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$. Это позволяет вычислить значение функции Лёни для аргумента 935 как

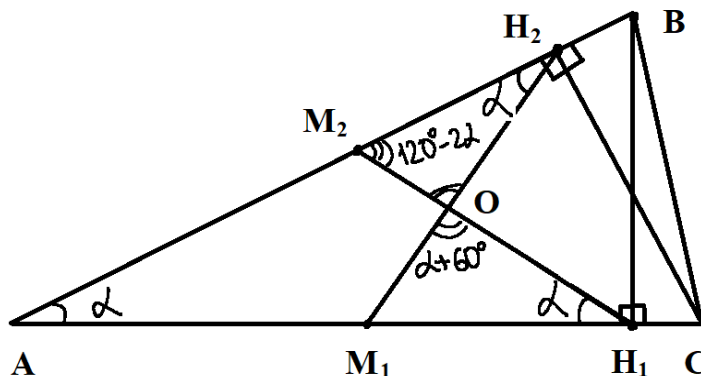
$$\varphi(935) = \varphi(5) \cdot \varphi(11) \cdot \varphi(17) = 4 \cdot 10 \cdot 16 = 640.$$

Критерии: Полное решение – 7 баллов. За полностью переборный вариант решения, в случае правильного подсчёта – 7 баллов. При использовании функции Эйлера обязательна отсылка к её свойствам, которые будут использованы(без доказательства). Пропущено число 1 (оно взаимно простое со всеми натуральными числами) – (-1) к общей сумме баллов. Ошибки при использовании формулы включений-исключений считать критическими – 0 баллов. Ответ без обоснования – 0 баллов.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BH_1 , CH_2 и медианы BM_1 , CM_2 . Известно, что угол между прямыми M_1H_2 и M_2H_1 на 60° градусов больше градусной меры угла A . Какова градусная мера угла A ?

Ответ: 30° .

Решение: Рассмотрим точку O пересечения прямых M_1H_2 и M_2H_1 . Пусть для определённости указанный угол между прямыми будет M_2OH_2 . Обозначим величину

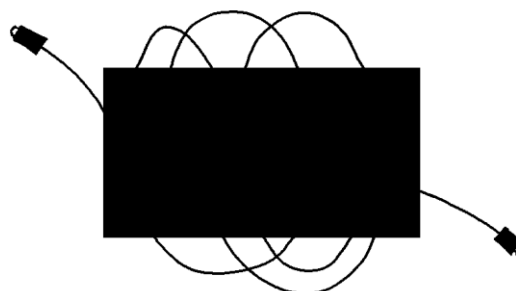


угла треугольника ABC при вершине A как α . Тогда, величина угла M_2OH_2 равна $\alpha + 60^\circ$. Рассмотрим прямоугольный треугольник AH_2C . Для него отрезок H_2M_1 – медиана, проведённая из вершины прямого угла. Нетрудно доказать, что она отсекает от треугольника AH_2C два равнобедренных треугольника AH_2M_1 и CH_2M_1 . Следовательно, угол AH_2M_1 равен углу A , а тогда в треугольнике M_2OH_2 величина угла H_2M_2O равна $180^\circ - (\alpha + (\alpha + 60^\circ)) = 120^\circ - 2\alpha$.

Аналогично, рассматривая медиану в треугольнике ABH_1 , проведённую из вершины прямого угла, получим равенство углов A и AH_1M_2 . Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник AM_2H_1 с двумя равными острыми углами, равными α . Угол $H_2M_2H_1$ для него является внешним углом при вершине M_2 , а значит его величина равна сумме углов треугольника не смежных с ним, то есть, $\alpha + \alpha = 120^\circ - 2\alpha$, откуда легко получить $\alpha = 30^\circ$. Случай, когда угол между прямыми M_1H_2 и M_2H_1 будет H_2OH_1 рассматривается аналогично и ответ тот же.

Критерии: Полное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что треугольники AM_2H_1 и AM_1H_2 равнобедренные – 2 балла. При верном ходе решения и верном ответе рассмотрены не все случаи острого угла между прямыми M_1H_2 и M_2H_1 – 5 баллов. Только ответ – 0 баллов.

4. Меланья запутала USB-провод для зарядки, положила поверх спутанного провода телефон, сфотографировала и выложила фото (см. рисунок) в сторис,



предложив желающим отгадать, сколько существует вариантов соединения частей провода под телефоном(какие видимые части провода соединены с какими). Итак, сколько вариантов? Ответ обосновать.

Ответ: $6! \cdot 2^6$ вариантов.

Решение: Рассмотрим те части провода, что торчат из-под телефона. Пара из них – разные концы провода со штекерами(левый и правый, для определённости) и 6 кусков провода, имеющие 2 конца, уходящие под телефон. Так как провод один и тот же, какие-то его куски соединяются под телефоном с какими-то другими. Посчитаем количество разных вариантов соединения. Для удобства, рассмотрим соединение шести кусков друг с другом, а потом для каких-то двух кусков по одному из концов соединим с правым и левым кусками со штекером. Итак, отметим все шесть кусков провода разным цветом и «распрявим провод». Все шесть кусков на прямом проводе расположены в каком-то порядке и количество вариантов разного расположения кусков – это количество перестановок из шести – $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ Заметим, что каждый цветной кусок может двумя способами быть ориентирован(можно поменять местами концы куска – 2 разных варианта). Согласно правилу произведения комбинаторики, количество разных вариантов соединения $6! \cdot 2^6 = 46080$ вариантов.

Критерии: Полное обоснованное решение – 7 баллов. Если при верном решении участник рассматривает «одинаковые» концы провода и получает результат в 2 раза больший/меньший – 4 балла. Только ответ, без обоснования – 0 баллов.

5. Какое наибольшее число нечётных цифр может иметь пятизначное число, делящееся нацело на 101? Ответ обосновать.

Ответ: 4 цифры.

Решение: Для примера(на 4 цифры) можно предоставить любое подходящее число, имеющее ровно 4 нечётные цифры и кратное 101. Например, $99990 = 990 \cdot 101$ – самое большое из возможных. Теперь докажем, что все пять цифр не могут быть нечётными.

Приведём доказательство от противного. Для этого рассмотрим трёхзначное число $\overline{abc}$, умножив на которое 101 получим искомое число $A = \overline{abc} \cdot 101$ с пятью нечётными цифрами. Заметим, что его можно записать как $A = \overline{abc} \cdot 100 + \overline{abc} = \overline{ab} \cdot 1000 + (a + c) \cdot 100 + \overline{bc}$. Последние две цифры числа –

нечётные по условию, значит b и c – нечётные. Цифра разряда сотен нечётная, а значит и y суммы $(a + c)$ в разряде единиц нечётна. Так как цифра c нечётна, то a – чётная цифра. Заметим, что так как цифра разряда тысяч должна быть нечётной, то перехода через десяток в сумме $(a + c)$ не может быть (иначе в разряде тысяч окажется чётная цифра, так как $(b + 1)$ – чётно). Итак, в старшем разряде остаётся чётная цифра a (так как иначе должен быть переход через десяток в предыдущем разряде, и в разряде тысяч будет чётная цифра 0), а значит получаем противоречие с тем утверждением, что все цифры числа нечётны. Заметим, что трёхзначность числа $\overline{abc}$ существенна: двузначные множители не приводят к пятизначному при умножении на 101.

Критерии: Заметим, что данная задача на тему «оценка плюс пример». Поэтому в решении оценивается не только оценка (не более 4-х нечётных цифр), но и пример, подтверждающий, что 4 цифры точно есть. Причём, наличие доказательства, что не более 4-х нечётных цифр (оценку) – 5 баллов максимум, а наличие примера на 4 нечётные цифры – 2 балла. Полное решение (обоснованная оценка и правильный пример) – 7 баллов. Отдельно оценивается доказательство, что возможно не более 4-х нечётных цифр (оценка) – 5 баллов максимально за эту часть решения. За приведённый верный пример (их много, нужно проверять предоставленный вариант) – 2 балла при наличии оценки на 4 цифры. Если оценки нет (или она недостаточно обоснована), то приведённый пример – не более 1 балла. Только ответ (без доказательства и примера) – 0 баллов.

6. В гардеробе театра в очереди друг за другом стоят 50 мальчиков и 50 девочек в каком-то порядке. Скучающий охранник театра заметил, что в этой очереди есть ровно одна группа из 30 детей, стоящих подряд, в которой мальчиков и девочек поровну. Помогите доказать охраннику, что найдётся группа из 70 стоящих подряд детей, в которой мальчиков и девочек также будет поровну.

Решение(доказательство): Если расположить очередь из детей в виде круга, то по условию задачи найдётся группа из 30 детей, в которой мальчиков и девочек равное количество. Докажем, что таких групп в круге не менее двух.

Рассмотрим такую группу из 30 детей, где количество мальчиков и девочек разное (пусть, для определенности, мальчиков меньше половины). Если

предположить, что кроме той группы, что замечена в очереди, других нет, то имеем 100 подряд стоящих по кругу детей, среди которых мальчиков и девочек поровну(по 50), но в любых группах(кроме ровно одной) по 30 детей подряд мальчиков и девочек не поровну.

Докажем, что если найдется группа из 30 детей, где мальчиков больше половины, то найдётся и группа из 30 детей, где мальчиков меньше половины. Действительно, если последовательно выбирать из круга все возможные группы из 30 подряд стоящих детей, в которых мальчиков будет не меньше половины, то среди 100 детей мальчиков будет больше, чем девочек (каждый ребёнок входит ровно в 30 групп, а при подсчёте суммы всех мальчиков во всех группах их суммарно не меньше половины), что противоречит условиям. То есть, в круге есть две группы по 30 детей, в одной из которых мальчиков больше половины, а в другой – меньше половины. Тогда, последовательно перебирая группы из 30 детей, начиная с одной группы(больше половины мальчиков) и двигаясь ко второй группе(меньше половины), в какой-то момент получим группу из 30 детей с равным количеством мальчиков и девочек(так как каждая новая группа по количеству мальчиков меняется на 1 или не меняется). То же можно утверждать, двигаясь по кругу в противоположном направлении. Таким образом, показали, что в круге не менее двух групп по 30 подряд стоящих детей, в которых мальчиков и девочек поровну.

Тогда при размыкании круга обратно в очередь, все кроме одной такие группы с равным количеством девочек и мальчиков по условию должны разорваться, значит, между частями, на которые каждая такая группа разорвалась(между крайними детьми в группе), в ряду стоит ровно 70 детей, среди которых девочек и мальчиков поровну. Что и требовалось доказать.

Возможны и другие методы доказательства, необходимо внимательно проверять утверждения и их обоснование.

Критерии: Полное обоснованное решение – 7 баллов.
Рассмотрение частных случаев расположения детей в очереди и необоснованные обобщения на общий случай – 0 баллов.