

8 класс

8.1. Из цифр 0, 1, 2, ..., 9 составили два пятизначных числа A и B (все цифры использованы, на 0 число начинаться не может). Может ли оказаться так, что число A делится на каждую цифру числа B , кроме 0, а число B делится на каждую цифру числа A ?

Ответ. Может.

Решение. Например, подойдут числа $A=49518$, $B=76320$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Любой правильный пример – 7 баллов.

8.2. Среди 22 человек 11 лжецов (они всегда лгут) и 11 рыцарей (они всегда говорят правду). Каждому из них дали конверт, причём ровно в 11 из них положили открытку. У людей спросили, есть ли у них в конверте открытка. Могло ли оказаться, что 11 из них ответили «да», а 11 ответили «нет»?

Ответ. Не может.

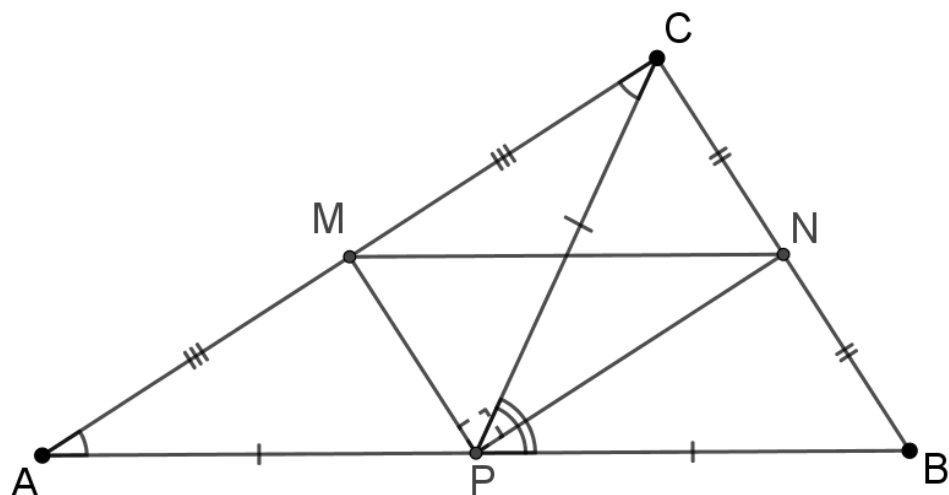
Решение. Пусть сначала ни у кого не было открытки, тогда мы получим 11 ответов «да» и 11 ответов «нет». Будем давать по очереди 11 людям открытки. При выдаче открытки любой человек (лжец или рыцарь) изменит свой ответ на противоположный. То есть произойдет 11 смен ответов. Но так как и после выдачи открыток оказалось 11 ответов «да» и 11 ответов «нет», то количество смен ответов должно быть чётным. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8.3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка P . Оказалось, что угол APC в два раза больше угла ABC , угол BPC в два раза больше угла BAC . Найдите PC , если $MN = 4$, где точка M – середина стороны AC , а точка N – середина стороны BC .

Ответ. 4.

Решение. Внешний угол BPC треугольника APC равен сумме углов PAC и PCA . По условию, угол BPC в два раза больше угла PAC , значит, углы PAC и PCA равны, и тогда $PA = PC$. Аналогично $PB = PC$. Следовательно, треугольники APC и BPC являются равнобедренными и в них медианы PM и PN являются и биссектрисами, и высотами, значит, углы PMC , PNC – прямые. Угол MPN – прямой как сумма половин двух смежных углов APC и BPC . Тогда в четырёхугольнике $MPNC$ углы MPN , PMC , PNC – прямые, откуда $MPNC$ – прямоугольник. Тогда $MN = PC = 4$ как диагонали прямоугольника.



Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказана равнобедренность одного из треугольников – 3 балла.

8.4. Олег утверждает, что какие бы 80 попарно различных натуральных чисел ему не дали, он может выложить их в ряд так, что среди сумм соседних чисел встретится не менее N составных. Какое наибольшее значение может принимать N ?

Ответ. 78.

Решение. Если все числа одной четности, то все суммы будут чётными числами (большими 2), а, значит, составными. Иначе, расставив сначала все чётные, а затем все нечётные числа, Олег гарантирует, что 78 из 79 сумм точно будут чётными числами. Покажем, что 79 составных чисел можно получить не всегда. Пусть Олегу дали набор чисел $1, p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_{79} - 1$, где $p_1, p_2, \dots, p_{79}$ – различные нечётные простые числа. Тогда как бы ни выкладывал числа Олег, число 1 вместе со своим соседом в сумме будет давать простое число.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что можно сделать 78 составных сумм – 4 балла.
Доказано, что 79 составных сумм можно сделать не всегда – 3 балла.

8.5. Можно ли выбрать числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ так, что произведения $a_1 a_2 a_3 a_4, a_2 a_3 a_4 a_5, \dots, a_8 a_9 a_{10} a_1, a_9 a_{10} a_1 a_2, a_{10} a_1 a_2 a_3$, записанные в некотором порядке, образовывали последовательные натуральные числа $21, 22, 23, \dots, 30$?

Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим 5 произведений $a_1 a_2 a_3 a_4, a_3 a_4 a_5 a_6, a_5 a_6 a_7 a_8, a_7 a_8 a_9 a_{10}, a_9 a_{10} a_1 a_2$. Если их перемножить, мы получим произведение, в котором каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ участвует дважды, то есть равно $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10})^2$. Аналогично, оставшиеся 5 произведений при перемножении дадут $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10})^2$. Это означает, что 10 произведений можно разбить на две группы по 5 с одинаковым произведением. Но числа от 21 до 30 нельзя разбить на две группы по 5 чисел с одинаковым произведением, так как, например, среди них есть простое число 23, а никакое другое из них на 23 не делится.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.