

Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2025 г.)

8 класс

1. Докажите, что по крайней мере одно из квадратных уравнений

$$20px^2 + mx + 25 = 0 \quad \text{или} \quad 25x^2 + nx - 20p = 0$$

имеет решение. (p , m и n - произвольные действительные числа, $p \neq 0$).

Доказательство. Вычислим дискриминанты данных уравнений:

$$D_1 = m^2 - 4 \cdot 20 \cdot 25p, \quad D_2 = n^2 + 4 \cdot 20 \cdot 25p.$$

Если $p > 0$, то $D_2 > 0$ и решение имеет второе из данных уравнений. Если же $p < 0$ то $D_1 > 0$ и решение имеет первое уравнение. Что и требовалось доказать.

2. На межгалактический съезд прилетело несколько инопланетян с планеты Альфа, астероида Вега и созвездия Кассиопея. Каждый инопланетянин с планеты Альфа имеет два телескопа и два скафандра, каждый инопланетянин с астероида Вега – два телескопа, четыре скафандра и один планшет, а у каждого инопланетянина с созвездия Кассиопея есть только один планшет и два скафандра. Всего на съезде насчитали 500 планшетов и 1025 телескопов. А сколько насчитали скафандров?

Решение. Пусть на съезд прилетели m инопланетян с планеты Альфа, k инопланетян с астероида Вега и s инопланетян с созвездия Кассиопея. Тогда планшетов у них всего $k + s = 500$, телескопов всего $2m + 2k = 94$, а скафандров $2m + 4k + 2s = 2(k + s) + (2m + 2k) = 1000 + 1025 = 2025$.

Ответ: 2025.

3. Дана функция $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Докажите равенство:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(-x).$$

Доказательство. Преобразуем:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) = \frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{-1-x}{-1+x} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+1} = 1,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(-x) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} \cdot \frac{-x-1}{-x+1} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{x+1}{x-1} = 1. \text{ Значит,}$$

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(-x). \text{ Что и требовалось доказать.}$$

4. Замените буквы различными цифрами так, чтобы равенство было верным:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \overline{a_9 a_{10}},$$

где $\overline{a_9 a_{10}}$ – двузначное число, составленное из цифр a_9 и a_{10} .

Решение. Отметим, что приведенный пример единственен с точностью до порядка слагаемых в левой части равенства. Действительно, пусть в правой части стоит число $\overline{a_9 a_{10}}$. Так как сумма десяти различных цифр равна 45, то данное равенство можно записать в виде $45 - a_9 - a_{10} = 10a_9 + a_{10}$. Упрощая его, получим: $11a_9 + 2a_{10} = 45$. Простейший перебор показывает, что $a_9 = 3$, $a_{10} = 6$.

Ответ: $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 0 = 36$.

5. Дана трапеция $MNPQ$, в которой MN и PQ боковые стороны. На стороне MN взята точка L так, что $QL \perp MN$. Докажите, что $LP = PQ$.

Доказательство. Продолжим боковые стороны MN и PQ до их пересечения в точке S (см. рисунок). Тогда NP – средняя линия треугольника MSQ (так как $NP \parallel MQ$ и $NP = 0,5MQ$). LP – медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника QLS , следовательно, $LP = SP = PQ$. Что и требовалось доказать.

Примечание. Существуют и другие способы доказательства.

