

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2025-2026 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

8-Й КЛАСС
РЕШЕНИЯ

Задание 8.1

Решите уравнение в натуральных числах:

$$a^n - n \cdot a = 2026, (a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$$

Ответ: $a=2, n=11$

Решение.

$a^n - n \cdot a = 2026, a \cdot (a^{n-1} - n) = 1 \cdot 2 \cdot 1013$, заметим, что 1013 - простое число.

Рассмотрим случаи, когда $a=1, a=2, a=1013$.

Если $a=1$, то $1 \cdot (1 - n) = 2026$ и решений нет.

Если $a=2$, то $2 \cdot (2^{n-1} - n) = 2 \cdot 1013$, т.е. $2^{n-1} - n = 1013$ и при $n=11$ получаем верное равенство.

Если $a=1013$, то $1013 \cdot (1013^{n-1} - n) = 2 \cdot 1013$, тогда $1013^{n-1} - n = 2$, очевидно нет решений.

Критерии оценивания

7	Решение задачи полностью аргументировано.
6 -5	Решение правильное, но недостаточно обоснованно
3	В ходе рассуждений указано, что 1013 - простое число и найдены $a=2, n=11$. Все случаи не рассмотрены.
2	Используется метод перебора, но не завершён
1	Дан правильный ответ без решения, что $a=2, n=11$
0	Решение отсутствует или полностью неверно .

Задание 8.2

Пусть a и b некоторые рациональные числа, для которых выполняется

$a^3 + b^3 = 2 \cdot ab$. Докажите, что $1 - ab$ является квадратом рационального числа.

Решение.

При $a=0$ и $b=0$ условие выполняется. Докажем для других рациональных чисел.

Возведём обе части уравнения в квадрат : $(a^3 + b^3)^2 = (2 \cdot ab)^2$

Получим выражение $a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = 4a^2b^2$

Преобразуем в формулу квадрата разности : $a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = 4a^2b^2 - 4a^3b^3$

Из этого следует, что $(a^3 - b^3)^2 = 4a^2b^2(1 - ab)$ и $\left(\frac{a^3 - b^3}{2ab}\right)^2 = 1 - ab$

Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания

7	Доказательство полностью аргументировано.
6 -5	Решение правильное, но недостаточно обоснованно
2	Свели к формуле, но не смогли сделать вывод $a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = 4a^2b^2 - 4a^3b^3$
1	Есть некоторые правильные рассуждения, но они не привели к верному доказательству.
0	Решение отсутствует или полностью неверно.

Задание 8.3

Дана горизонтальная полоска 1×2026 . Пусть в каждой из семи крайних слева клеток стоит по одной фишке. Двое игроков по очереди берут одну из фишек и переставляют ее на несколько клеток правее. Перепрыгивать через поставленные фишки нельзя. Ходить можно только той фишкой, у которой справа есть свободное место. Проиграет тот, кто не сможет сделать свой очередной ход. Кто выиграет при правильной игре, укажите как это можно сделать.

Ответ. Выиграет первый игрок при правильной стратегии.

Решение. Покажем, что выиграет первый. Пронумеруем фишки и места таблицы. Разделим их на группы: 1и2; 3и4; 5и6; 7

1	2	3	4	5	6	7	•	•							•	•	2026
---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	---	---	------

Первым ходом первый игрок фишку №7 ставит в позицию 2026. Остаётся чётное количество фишек. Второй двигает фишку №6, первый ставит рядом фишку №5 из этой группы. Стратегия первого игрока- на каждый ход второго следует отвечать ходом фишки из той же группы. Важно, что фишки должны

стоять после хода на соседних клетках. Значит первый обеспечит себе победу, так как всегда сможет сделать ход

Критерии оценивания

7	Решение задачи полностью аргументировано.
1	Есть правильные утверждения, но задача не решена до конца
0	Решение отсутствует или полностью неверно .

Задание 8.4

На рисунке треугольники ABC и KBN равносторонние. Точки L, M и P – середины отрезков AB, BN и KC соответственно. Докажите, что треугольник LMP -равносторонний.

Решение

Через точку P проведём $FS \parallel AC$.

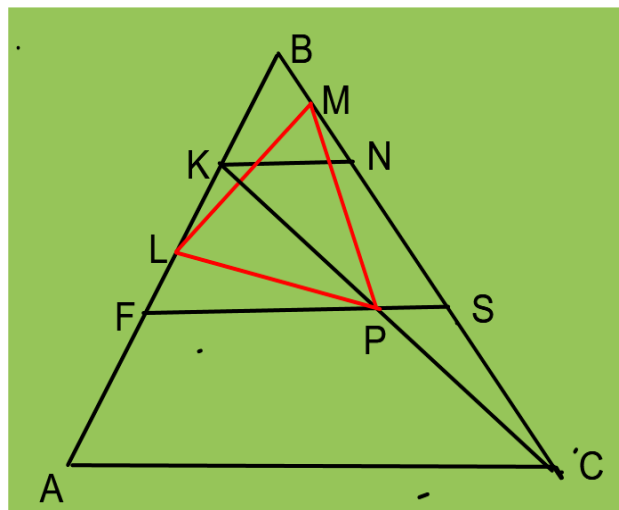
По условию $KP = PC$, тогда PS и FP – средние линии $\triangle KNC$ и $\triangle AKC$,

тогда $PS = \frac{1}{2} KN = BM$.

$FP = \frac{1}{2} AC$, $MS = \frac{1}{2} BC$.

Заметим, что $BM = PS = FL$, $MS = FP = BL$, тогда $\triangle BLM = \triangle FLP = \triangle SMP$

(по двум сторонам и углу между ними). Следовательно $LM = MP = PL$ т.е $\triangle LMP$ -равносторонний.



7	Доказательство полностью аргументировано.
6 -5	Решение правильное, но недостаточно обоснованно
2	Доказано равенство двух треугольников или построена прямая параллельная AC и указаны средние линии
1	Есть некоторые правильные рассуждения, но они не привели к верному доказательству.
0	Решение отсутствует или полностью неверно.

Задание 8.5

На доске написали число 1090. Какое наименьшее количество цифр можно дописать слева или справа от записанного числа так, чтоб получившееся число делилось на 91.

Решение

Рассмотрим число: $91=7 \cdot 13$ и применим признак делимости на 7 и 13

Если дано число $abcde$. Разбиваем его на тройки $0ab\ cde$ и находим разность чисел

Число делится на 7 или на 13, или на 7 и 13, если образованная разность из трёхзначных чисел делится на 7, 13 или 91.

В нашем случае на 91. Аналогично для другого количества цифр числа $abcdef$

$(0ab - cde) : 91$ $(abc - def) : 91$

ав1090 **90 + 91 = 181**. Значит можно дописать слева 18, т.к. $ав1 - 090 = 91$.

Значит, дописав слева получаем **181090**.

Можно дописать справа 1090ав. Тогда $109 - 0ав = 91$. $109 - 91 = 18$. Значит получим число **109018**

Проверим, можно ли только 1 цифру дописать?

$a1090$ $0a1 - 090 = 91$ $91 + 90 = 181$ и это не двузначное число $a1$

$1090a$ $010 - 90a = 91$ $10 - 91 = -81$ и его нельзя представить, как $90a$

Значит наименьшее 2 цифры

7	Доказательство полностью аргументировано.
6 -5	Решение правильное, но недостаточно обоснованно
2	Есть правильные рассуждения, связанные с признаками делимости но они не привели к верному решению.
1	Найдено одно из чисел, которое делится на 91
0	Решение отсутствует или полностью неверно.