

8 класс

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

8.1. Найдите количество всех таких четырёхзначных чисел, которые делятся на 2, 3, 4, 5, 6 и 7, но не делятся на 8 и не делятся на 9.

Ответ: 7.

Решение. Все такие числа имеют вид $12 \cdot 5 \cdot 7 \cdot n$, где n не делится на 2 и не делится на 3. Так как $999 < 12 \cdot 5 \cdot 7 \cdot n < 10000$, то $5 \leq n \leq 23$. При $n = 1$ число $12 \cdot 5 \cdot 7 = 420 < 999$, для $n = 5$ и $n = 23$ получим $12 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 = 2100$ и $12 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 = 9660$ соответственно, а при $n > 23$ число $12 \cdot 5 \cdot 7 \cdot n > 10000$. Подходящими значениями n являются числа 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Всего 7 чисел.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.

8.2. Докажите, что если $x + 1 > 0$, $y + 1 > 0$ и $x + y = 1$, то справедливо неравенство

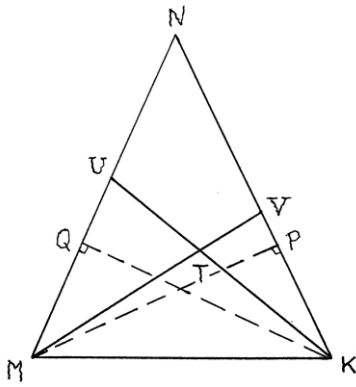
$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq \frac{2}{3}$$

При каких x и y выполняется равенство?

Решение. С учётом положительности знаменателей и условия $x + y = 1$ приведём исходное неравенство к виду $3(x^2 + y^2 + 1) \geq 2(xy + 2)$. Так как $y = 1 - x$, то $3(x^2 + (1 - x)^2 + 1) \geq 2(x(1 - x) + 2)$, $8x^2 - 8x + 2 = 2(2x - 1)^2 \geq 0$. Последнее неравенство верно при всех x . При этом равенство достигается при $x = 1/2 = y$.

Комментарии. Верное доказательство неравенства без указания значений x и y , при которых достигается равенство – 6 баллов.

8.3. На боковых сторонах MN и KN равнобедренного треугольника MNK взяты точки U и V соответственно. Отрезки MV и KU пересекаются в точке T . Докажите, что если площадь четырёхугольника $UNVT$ равна площади треугольника MTK , то $MU = NV$.



Решение. Рассмотрим треугольники MNV и MUK. Площадь треугольника MNV равна $S_{MNV} = S_{UNVT} + S_{MUT}$, а площадь треугольника MUK равна $S_{MUK} = S_{MTK} + S_{MUT}$. Так как $S_{UNVT} = S_{MTK}$, то $S_{MNV} = S_{MUK}$. Проведём из точки M перпендикуляр MP к NK, а из точки K - перпендикуляр KQ к MN. Прямоугольные треугольники MPK и KQM равны, так как у них общая гипотенуза MK и равные углы MKP и KMQ. Значит, MP = KQ. Тогда $S_{MNV} = NV \cdot MP/2$, $S_{MUK} = MU \cdot KQ/2$. Отсюда следует, что $NV = MU$.

Комментарии. Получено уравнение $S_{MNV} = S_{MUK}$ – 3 балла.

8.4. Есть $2n$ чёрных точек и n жёлтых. Между любыми двумя точками проведен отрезок со стрелкой так, что отрезков, выходящих из всех чёрных точек в $1,4$ раза меньше, чем отрезков, выходящих из всех жёлтых точек. Найдите все возможные значения n . Для любого из этих n приведите подходящий пример.

Ответ: 3

Решение. Всего вершин $3n$, и при этом количество всех исходящих стрелок равно $3n \cdot (3n-1)/2$. Пусть количество исходящих стрелок у чёрных вершин равно p , а у жёлтых q , тогда $5q = 7p$ и $p + q = 3n \cdot (3n-1)/2$, откуда $p = 5n \cdot (3n-1)/8$. Так как $2n$ чёрных вершин соединены направленными отрезками, по крайней мере между собой, а количество таких отрезков равно $n(2n-1)$, то $p \geq n(2n-1)$. Поэтому $15n^2 - 5n \geq 16n^2 - 8n$, $n \leq 3$ и при этом $n \cdot (3n-1)$ делится на 8. Подходит только $n = 3$. Пример для $n = 3$ построим следующим образом. Пусть между чёрными точками проведено $6 \cdot 5/2 = 15$ стрелок, а между жёлтыми точками проведено 3 стрелки. Если из всех жёлтых точек ко всем чёрным точкам провести стрелки, то из жёлтых точек всего будет проведена 21 стрелка, а $21 = 15 \cdot 1,4$.

Комментарии. Приведён верный пример – 3 балла.

Доказано, что подходит только $n = 3$ – 4 балла.

8.5. Каждое целое положительное число покрасили в чёрный или в белый цвет. Верно ли, что найдутся два разных числа одного цвета, среднее арифметическое (полусумма) которых есть натуральное число того же цвета?

Ответ: верно.

1-е решение. Предположим, что таких чисел нет. Рассмотрим числа 1, 3, 5. Ровно два из них одного цвета. Рассмотрим три случая.

1) Пусть 1 и 3 - числа чёрного цвета. Тогда $(1+3)/2 = 2$ - белое и 5 - тоже белое, так как $3 = (1+5)/2$. Число 8 - чёрное, так как $(2+8)/2 = 5$, а число 15 - белое, так как $(1+15)/2 = 8$. Рассуждая таким образом, последовательно получаем, что $10 = (5+15)/2$ - чёрное, $9 = (8+10)/2$ - белое, $7 = (5+9)/2$ - чёрное, $4 = (1+7)/2$ - белое. Тогда если 6 - чёрное число, то $(8+6)/2 = 7$ и числа 6, 7, 8 - чёрные (?). А если 6 - белое, то $(4+6)/2 = 5$ и числа 4, 5, 6 - белые. Получили противоречие.

2) Пусть 1 и 5 - числа чёрного цвета. Тогда числа 3 и 9 - белые, 6 - чёрное, 7 и 4 - белые, 8 - чёрное, 2 - белое. А тогда $(2+4)/2 = 3$ и числа 2, 3, 4 - белые. Получили противоречие.

3) Пусть 3 и 5 - числа чёрного цвета. Тогда числа 1, 4 и 7 - белые и $(1+7)/2 = 4$. Получили противоречие.

2-е решение. Предположим, что таких чисел нет. Рассмотрим нечётные числа 1, 3, 5, 7, 9. Если среди них нет двух последовательных чисел одного цвета, то числа 1, 5, 9 одного цвета и $5 = (1+9)/2$. Противоречие. Значит, есть два последовательных нечётных числа одного цвета. Аналогично, есть два последовательных чётных числа одного цвета. Рассмотрим числа n и $n+2$ одного цвета (пусть числа чёрного цвета). Тогда числа $n+1$, $n+4$ и $n+8$ - белые, а число $n+6$ - чёрное. Число $n+3 = (n+(n+6))/2$ - белое. Так как $n+3 = ((n+1)+(n+5))/2$, то $n+5$ - чёрное число, а $n+7$ - белое. Но $n+4 = ((n+1)+(n+7))/2$. Противоречие.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.