

8 класс

1. Сумма трех натуральных чисел (не обязательно различных) равна 1000. Из этих чисел составляют три попарные разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма этих попарных разностей?

Решение

Пусть a, b, c – данные числа. Условимся, что $a \leq b \leq c$. Тогда сумма разностей будет равна

$(b-a)+(c-a)+(c-b)=2c-2a$. Так как $a+b+c=1000$, то $c \leq 998$ и, следовательно, $2c-2a \leq 2 \times 998 - 2 \times 1 = 1994$.

Таким образом, найденная сумма достигается при $c=998$ и $a=b=1$.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верное и обоснованное решение – 7 баллов.

Приведен пример с верной суммой, но нет обоснования почему нельзя составить большую – 2 балла.

Проведена верная оценка суммы разностей без указания значений a, b, c – 5 баллов.

2. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора натуральных чисел от 1 до 2028, чтобы сумма любых двух выбранных делилась на 8?

Решение

Чтобы сумма любых двух чисел делилась на данное число, необходимо, чтобы сумма их остатков делилась на это число. Сумма остатков любых двух чисел будет делиться на 8, если каждое из этих чисел делилось на 8 или если остаток от деления равен 4.

Найдем количество таких чисел. $2028:8=253$ (ост.4).

Тогда количество чисел, делящихся на 8, будет 253, а чисел, дающих при делении на 8 остаток 4, будет $253+1=254$.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верное и обоснованное решение (прямой перебор считать обоснованным решением) – 7 баллов.

Рассмотрены только числа, делящиеся на 8 – 2 балла.

Допущена вычислительная ошибка или неточность в рассуждениях – от 4 до 6 баллов.

3. Старший брат с младшей сестрой катаются на катке по кругу. Когда они катались в одном направлении, брат время от времени обгонял сестру. А когда стали кататься в противоположных направлениях, то стали встречаться в 3

раза чаще. При этом при катании навстречу между ближайшими встречами проходило 30 секунд. За сколько секунд брат проезжает полный круг?

Решение

1) Пусть x – скорость брата, а y – скорость сестры. При катании в одну сторону скорость сближения $x - y$. При катании навстречу друг другу скорость сближения $x + y$. Поскольку при катании навстречу скорость сближения в 3 раза больше, чем при катании в одном направлении, то справедливо уравнение $x + y = 3(x - y)$, из которого $x = 2y$, то есть брат катается в 2 раза быстрее, чем сестра.

2) Тогда при катании навстречу между двумя соседними встречами сестра проедет $1/3$ круга, а брат $2/3$. То есть $2/3$ круга брат проезжает за 30 секунд. Значит, весь круг он проезжает за 45 секунд.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Приведен только первый пункт решения – 5 баллов.

При отсутствии обоснования факта «скорость брата в 2 раза больше скорости сестры» выполнен второй пункт решения и получен верный ответ – 2 балла.

При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка, не влияющая на ход рассуждений, в результате чего получен неверный ответ – 6 баллов.

Верное, полное и обоснованное решение – 7 баллов.

4. 10 грибников собрали вместе 130 грибов, причем каждый грибник сколько-то грибов нашел и каждый собрал отличное от любого другого грибника количество грибов. Известно, что любые 5 грибников собрали не меньше 50 грибов. Какое наибольшее количество грибов мог собрать один грибник?

Решение

Упорядочим грибников по возрастанию собранных ими грибов.

Тогда наименьшее количество грибов, собранных пятым грибником равно 12.

Иначе, первые пять грибников собрали не больше, чем $11+10+9+8+7=45$ грибов.

Тогда наименьшее количество грибов, собранных следующими грибниками 13, 14, 15 и 16.

Тогда наибольшее количество грибов 10-го грибника $130-50-13-14-15-16=22$.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верный ответ и только приведен верный пример – 0 баллов.

Верный ответ и выполнен полный перебор (при решении методом перебора) – 7 баллов.

Верное решение, но отсутствует обоснование «наименьшее количество грибов, собранных пятым грибником равно 12» и этот факт используется в решении – 5 баллов.

Верное, полное и обоснованное решение – 7 баллов.

При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка, не влияющая на ход рассуждений, в результате чего получен неверный ответ – 6 баллов.

5. Из 10 одинаковых квадратов со стороной 1 составили плоскую фигуру (не обязательно выпуклый многоугольник). У каждого квадрата есть хотя бы один соседний квадрат, с которым он имеет общую сторону. Любые два квадрата либо имеют общую сторону, либо общую вершину, либо не имеют ни общих сторон, ни общих вершин. Наложения квадратов друг на друга нет. Какой наибольший периметр у этой фигуры мог получиться?

Решение

Способ 1. Оценка. Рассмотрим граф, вершины которого – квадраты, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие квадраты имеют общую сторону. Этот граф должен быть связным, имеет 10 вершин, а значит, не менее $10-1=9$ ребер. Значит, $9 \times 2 = 18$ сторон у квадратов являются соседними. А всего у 10 квадратов 40 сторон. Поэтому $40 - 18 = 22$ стороны войдут в периметр. Наибольший периметр – 22.

Пример. Полоска 1×10 .

Способ 2. Оценка. Всего у 10 квадратов 40 сторон. Пусть эти квадраты образуют фигуру. Стороны этих квадратов разбиваются на 2 группы: соседние (к стороне квадрата прилежит сторона другого квадрата) и не соседние (не соседние стороны входят в периметр).

Будем собирать фигуру. При присоединении к фигуре квадрата добавляется минимум 2 соседние стороны. К первоначальному квадрату было присоединено 9 квадратов. Значит, к 0 соседних сторон добавилось минимум 18 соседних сторон. Значит, наибольший периметр $40 - 18 = 22$.

Пример. Полоска 1×10 .

Критерии

Только верный пример – 1 балл.

Верный пример и верная оценка, но в ней отсутствует обоснование, что наименьшее количество соседних сторон 18 – 3 балла.

Сделана верная и обоснованная оценка, но не приведен пример – решение оценивается в 6 баллов.

Верный пример и верная и полностью обоснованная оценка – 7 баллов.