

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2025-2026 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе**

Теоретический тур

8 класс

Максимальное количество баллов - 35.

Время выполнения - 235 минут.

Краткая инструкция.

Все олимпиадные задания выполняются письменно. Желательно пользоваться ручками с чернилами синего цвета. Чертежи производить желательно ручкой (сначала возможно использовать карандаш, но потом чертеж обвести ручкой).

Разрешается использовать чертёжные принадлежности (линейка, циркуль, ластик) для выполнения заданий.

Участник олимпиады на выданном бланке ответов записывает подробные решения задач, указывая соответствующий номер задачи. Переписывать формулировки заданий не обязательно. Предварительные вычисления можно делать на выданных дополнительных листах (черновиках).

При выполнении заданий не допускается использование справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

После завершения работы все бумаги должны быть сданы организаторам олимпиады, включая черновики.

Решения задач, критерии оценивания

Задача 1.

В двух коробках лежат карандаши. Если бы из первой коробки переложили во вторую 5 карандашей, то во второй коробке стало бы в 3 раза больше карандашей, чем в первой. Если же из второй коробки переложить в первую 10 карандашей, то в первой станет в 2 раза больше, чем во второй. Сколько карандашей было всего в обеих коробках изначально?

Решение.

Пусть x — карандашей в первой коробке, y — во второй.

Первое условие: $(x - 5)$ — станет в первой, $(y + 5)$ — станет во второй. При этом вторая в 3 раза больше: $y + 5 = 3 \cdot (x - 5)$

Второе условие: $(x + 10)$ — станет в первой, $(y - 10)$ — станет во второй. При этом первая в 2 раза больше: $x + 10 = 2 \cdot (y - 10)$

Решая систему, получим, что в первой коробке было 14 карандашей, во второй — 22.

Ответ: 36

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Есть верные рассуждения, возможно составлены уравнения, но решение не доведено до конца или имеются арифметические ошибки в подсчетах – 1-5 баллов. Только ответ без обоснования – 2 балла.

Задача 2.

Два числа a и b получаются друг из друга перестановкой цифр. Рассмотрим число $a - b$. Найдём сумму цифр этого числа, потом сложим цифры, которыми записана сумма и т.д. Будем продолжать этот процесс, пока в конце концов не получим однозначное число. Чему равно это однозначное число?

Решение.

Если числа получены перестановкой цифр, то их остатки при делении на 9 равны, а, значит, их разность кратна 9. При сложении цифр получается число, которое так же кратно 9. Т.е. полученное в результате однозначное число будет кратно 9, нулем оно быть не может, значит это число 9.

Ответ: 9.

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Есть верные рассуждения, но решение не доведено до конца – 1-4 баллов. Рассмотрены частные случаи чисел и сделан вывод – 0 баллов. Только ответ без обоснования – 0 балл.

Задача 3.

По кругу по порядку расположены целые числа от 0 до 2025. За один ход можно к любым 1013 подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых 1013, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких ходов сделать все числа равными?

Решение.

Всего имеем 2026 чисел. Разобьем их на пары диаметрально противоположных: 0 и 1013, 1 и 1014, ..., 1012 и 2025, всего 1013 пар.

Первое преобразование увеличивает одно из чисел в каждой из 1013 пар. Второе преобразование затрагивает либо только четные числа, либо только нечетные, а значит уменьшает тоже только одно из чисел в каждой из 1013 пар. Это значит, что суммы в каждой из 1013 пар либо одновременно увеличиваются, либо одновременно уменьшаются, а значит не смогут стать равными.

Ответ: нет.

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Есть верные рассуждения, но решение не доведено до конца – 1-4 баллов. Рассмотрены частные случаи преобразования чисел и сделан вывод – 0 баллов. Только ответ «нет» без обоснования – 0 балл.

Задача 4.

В турнире по волейболу участвовало 11 команд. Могло ли оказаться так, что в конце турнира были несколько команд, каждая из которых одержала по 2 победы, а каждая из оставшихся команд одержала по 7 побед? В волейболе не бывает ничьих.

Решение.

Всего состоялось $11 \cdot 10 / 2 = 55$ игр. Пусть было x команд, которые одержали 2 победы, $11-x$ команд, которые одержали 7 побед. Тогда $2 \cdot x + (11-x) \cdot 7 = 55$, т.к. количество побед совпадает с числом игр. Отсюда получаем, что $5x = 22$, то есть целых решений нет.

Ответ: нет, не могло.

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Есть верные рассуждения, но решение не доведено до – 1-4 баллов. Рассмотрены частные случаи игр и сделан вывод – 0 баллов. Только ответ без обоснования – 0 баллов.

Задача 5.

Каждому из n деревьев в парке присвоили номер – целое число от 1 до n , все номера различные. Пусть a_1 – количество листьев на первом дереве, a_2 – количество листьев на втором дереве и так далее. На последнем дереве будет a_n листьев. Теперь обозначим за b_1 число таких деревьев в парке, на которых количество листьев не меньше 1, b_2 – число таких деревьев, на которых листьев не меньше 2 и так далее. Оказалось, что $a_1 + a_2 + \dots = 20250$. Чему равна сумма $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$?

Решение.

Подсчет двумя способами. Сумма $a_1 + a_2 + \dots$ - это просто общее количество листьев, найденное по деревьям.

Теперь для удобства представим себе, что на дереве с k листьями, имеется k веток с номерами от 1 до k , и на каждой ветке по одному листу. Тогда на всех деревьях вместе на первых ветках – b_1 листьев, на всех вторых ветках вместе – b_2 листьев, на всех k -х ветках – b_k листьев, и т.д. Таким образом, всего листьев $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ листьев.

Ответ: 20250.

Рекомендации к оцениванию решения.

Верное обоснованное решение – 7 баллов. Есть верные рассуждения, но решение не доведено до – 1-4 баллов. Рассмотрены частные случаи деревьев и листьев, и сделан вывод – 0 баллов. Только ответ без обоснования – 0 баллов.