

Решения МЭ ВсОШ • 8 класс

1. На доске в ряд выписаны числа $1, 2, 3, \dots, 1000$ в порядке возрастания. Андрей стёр все числа, состоящие только из четных цифр. Какое число оказалось на 100-м месте в новом ряду? Ответ поясните.

Ответ. 124. **Решение.** Изначально на 100-м месте стоит число 100. Посчитаем, сколько чисел идущих до 100 вычеркнет Андрей.

Среди однозначных чисел он вычеркнет 4 числа (это числа 2, 4, 6, 8), среди двухзначных он вычеркнет $4 \cdot 5 = 20$ чисел (первая цифра может быть равна 2, 4, 6, 8 — 4 варианта, вторая цифра может быть равна 0, 2, 4, 6, 8 — 5 вариантов). Также заметим, что из чисел от 100 до 199 все числа останутся на доске, так как у них на первом месте стоит нечетная цифра 1.

Заметим, что каждое вычеркивание числа от 1 до 99 сдвигает весь ряд на 1 влево, то есть увеличивает на 1 число стоящее на 100-м месте. Тогда 24 вычеркнутых числа сдвинут 24 раза ряд влево, при этом увеличив число на 100-м месте на 24, то есть на 100-ю позицию сместится число 124.

Критерии. Ответ без обоснования — 2 балла.

2. Известно, что для некоторых различных чисел a, b, c и d отличных от нуля, прямые $y = ax + 2025a$, $y = bx + 2025b$ и $y = cx + d$ пересекаются в одной точке. Чему может быть равно число d/c ?

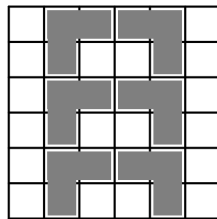
Ответ. 2025. **Решение.** Заметим, что $(-2025, 0)$ — точка пересечения прямых $y = ax + 2025a$ и $y = bx + 2025b$. Так как прямая $y = cx + d$ также проходит через точку $(-2025, 0)$, то $0 = -2025c + d$, так как $c \neq 0$ получаем, что $d/c = 2025$.

Критерии. Только ответ — 0 балла. Ответ с проверкой того, что при данном соотношении все прямые проходят через одну точку — 3 балла. Ответ с обоснованием его единственности — 7 баллов. За отсутствие пояснений, о нахождении общей точки первых двух прямых баллы не снимать.

3. Петя хочет вырезать из доски 6×6 несколько уголков из трех клеток  так, чтобы из оставшейся части нельзя было больше вырезать ни одного уголка. Какое наименьшее количество уголков необходимо вырезать Пете для задуманного? Уголки можно поворачивать и перемещать.

Ответ. 6. Решение. Задача состоит из двух частей: оценки и примера.

Оценка. Покажем, что нужно хотя бы 6 уголков. Разобьем доску на 9 непересекающихся квадратов 2×2 . В каждом таком квадрате должно быть вырезано хотя бы 2 клетки, иначе, из него можно будет вырезать уголок. Поэтому Петя должен вырезать не менее $2 \cdot 9 = 18$ клеток, на что понадобится не менее $18 : 3 = 6$ уголков.



Пример. Пример того, что достаточно вырезать 6 уголков на рисунке справа.

Критерии. Только оценка — 4 балла. Только пример — 2 балла.

4. На уроке по математике 8 учеников написали контрольную. Учитель хочет, чтобы дети проверили работы друг у друга. Каждый ученик должен проверить работу ровно одного из оставшихся. Также учитель пронумеровал детей и хочет, чтобы выполнялись следующие условия:

- первый проверяет работу того, кто проверяет работу второго;
- второй проверяет работу того, кто проверяет работу третьего;
- ...
- восьмой проверяет работу того, кто проверяет работу первого;

Удастся ли детям выполнить инструкцию учителя?

Ответ. Нет. Решение. Построим цепочку проверяющих. На первую позицию поставим первого проверяющего, а на каждую следующую того, кого проверяет предыдущего: $1 \rightarrow a_1 \rightarrow 2 \rightarrow a_2 \rightarrow 3 \dots$. Когда-то эта цепочка заикнется. Докажем, что там встретятся все ученики. Действительно, предположим туда кто-то не попал.

Рассмотрим из них человека с наименьшим номером n . Тогда ученик с номером $n - 1$ должен находиться в цикле слева от ученика с номером n , противоречие. Значит, все проверяющие должны образовывать цикл $1 \rightarrow a_1 \rightarrow 2 \rightarrow a_2 \rightarrow 3 \rightarrow a_3 \rightarrow 4 \rightarrow a_4 \rightarrow X$, где на последней позиции X согласно инструкции: "четвертый проверяет работу того, кто проверяет работу пятого" находится пятый, то есть $X = 5$. Но с другой стороны, так как проверяющие образуют цикл, то $X = 1$, что невозможно. Значит инструкцию выполнить не получится.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что проверяющие должны образовывать цикл длины 8 — 3 балла.

5. На сторонах квадрата AB , BC , CD и DA соответственно отмечены точки M , N , P и Q . Оказалось, что углы MNA , NAP и APQ равны 45° градусам. Докажите, что $AM = AQ$.

Решение. Отразим треугольники ABN и APD относительно AN и AP соответственно. Так как $\angle BAN + \angle PAD = \angle NAP = 45^\circ$ и $AB = AD$, то после отражения точки B и D совпадут в точке S — основании высоты из A на NP . Пусть H — точка пересечения высот треугольника ANP , тогда треугольники AMN и AHN равны по стороне и прилежащим к ней углам ($\angle MNA = \angle ANH = 45^\circ$), а значит $AM = AH$. Аналогично из равенства треугольников AHP и AQP следует, что $AH = AQ$, что доказывает задачу.

