

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
8 класс

Задача 8.1

Условие:

К числу 1 прибавили три натуральных числа: a , b , c . Могло ли в результате получиться число 2025, если известно следующее:

b – сумма цифр числа a , c – сумма цифр числа b ?

Ответ: Нет, не могло.

Решение:

Рассмотрим равенство: $1+a+b+c = 2025$, тогда $a+b+c = 2024$.

Число 2024 при делении на 9 дает остаток 8.

Так как b – сумма цифр числа a и c – сумма цифр числа b , то числа a , b , c дают одинаковые остаток r при делении на 9.

Следовательно, имеет место одно из равенств:

$$3r = 8, \quad 3r - 9 = 8, \quad 3r - 18 = 8.$$

Ни одному из них не удовлетворяет целое число r .

Замечание: Решение задачи можно проводить, анализируя остатки от деления на 3.

Дополнительные критерии:

Только ответ – 0 баллов

Просто приведены примеры, в которых не выполняется равенство $1+a+b+c = 2025$ – 0 баллов

Рассматривается только равенство $3r = 8$ – 4 балла

Задач 8.2

Условие:

Автобусы каждый день должны ездить из города A в B по определенному плану. В понедельник первый автобус ехал со скоростью 60 км/ч и приехал на час позже, чем было запланировано. Во вторник отправился другой автобус, со скоростью в полтора раза большей, чем первый автобус, и в результате приехал на час раньше запланированного. С какой скоростью следует отправить третий автобус, чтобы он приехал точно вовремя?

Ответ: 72 км/ч

Решение:

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
8 класс

Пусть t – время, которое автобус должен тратить на дорогу, чтобы приехать ни раньше и не позже, чем нужно, тогда, так как первый и второй автобусы проходили одинаковое расстояние, имеем:

$$60(t + 1) = 90(t - 1), \text{ откуда } t = 5 \text{ (ч)}$$

Значит, расстояние от A до B равно $60 \cdot 6 = 360$ (км).

Третий автобус должен двигаться со скоростью $360:5 = 72$ км/ч.

Дополнительные критерии:

Только ответ – 0 баллов

Логически верное решение, но допущена вычислительная ошибка – 5 баллов

Задача 8.3

Условие:

В деревне живут только рыцари и лжецы, всего 300 человек. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Каждый житель деревни любит только один из следующих фруктов: яблоко, груша, слива, абрикос. Каждому жителю деревне задали 4 вопроса:

- 1) Любишь ли ты яблоки?
- 2) Любите ли ты груши?
- 3) Любишь ли ты сливы?
- 4) Любишь ли ты абрикосы?

В результате на каждый вопрос было дано 140 утвердительных ответов. Сколько всего рыцарей живет в деревне?

Ответ. 170 рыцарей

Решение:

Так как каждый житель деревни любит только один из указанных фруктов, то каждый рыцарь дал утвердительный ответ только на один вопрос, а каждый лжец дал утвердительный ответ на три из четырех вопросов. Следовательно, суммарное количество утвердительных ответов, то есть $140 \cdot 4 = 560$, равно числу рыцарей плюс утроенное число лжецов. Поэтому число 560 превышает число жителей деревни на удвоенное число лжецов.

Итак, лжецов $(560 - 300):2 = 130$, а рыцарей $300 - 130 = 170$.

Дополнительные критерии:

Только ответ – 0 баллов

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
8 класс

Отмечено, что каждый рыцарь дал утвердительный ответ только на один вопрос, а каждый лжец дал утвердительный ответ на три из четырех вопросов, но далее продвижений нет – 2 балла

Логически верное решение, содержащее вычислительные ошибки – 5 баллов

Задача 8.4

Условие:

В клетчатом квадрате Миша закрасил другой клетчатый квадрат. В результате осталось 116 не закрашенных клеток. Сколько клеток закрасил Миша?

Ответ. 784 клетки.

Решение:

Пусть x клеток – сторона исходного квадрата, y клеток – сторона закрашенного квадрата. Тогда $x^2 - y^2 = 116$, следовательно, имеет место равенство: $(x - y)(x + y) = 116$. Заметим, что сумма и разность двух натуральных чисел имеют одну и ту же четность, то есть либо одновременно четные, либо одновременно нечетные. Так как число 116 – четное, то и сумма, и разность четные. Но число 116 можно представить в качестве произведения четных множителей только одним способом: $116 = 2 \cdot 58$, поэтому, так как разность двух натуральных чисел меньше их суммы, то $x - y = 2$, $x + y = 58$, откуда имеем: $x = 30$, $y = 28$.

Миша закрасил $28 \cdot 28 = 784$ клетки.

Дополнительные критерии:

Только ответ – 0 баллов

Если x и y найдены подбором и нет обоснования, что эта пара единственна – 4 балла

Логически верное решение, но допущена вычислительная ошибка – 5 баллов

Задача 8.5

Условие:

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
8 класс

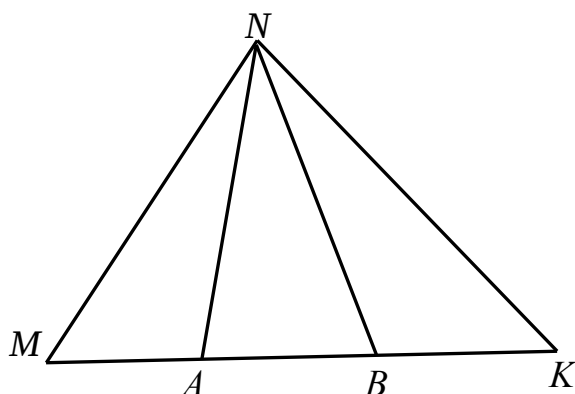
Из точки N треугольника MNK проведены два луча, которые разделили сторону MK на три равных отрезка. Могли ли при этом проведенные лучи разбить угол N треугольника MNK на три равных угла?

Ответ: Нет, не могли.

Решение:

Предположим, что такая ситуация возможна, то есть имеем равенство:
 $\angle MNA = \angle ANB = \angle BNK$.

Тогда в треугольнике MNB отрезок NA является и медианой, и биссектрисой, следовательно, треугольник MNB равнобедренный, а NA будет и высотой этого треугольника. Итак, $NA \perp MK$. Аналогично, рассматривая треугольник ANK , заключаем, что $NB \perp MK$. Таким образом, получили, что из точки N проведены две прямые, перпендикулярные MK , что противоречит теореме о единственности перпендикуляра к прямой: *через любую точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной*.



Дополнительные критерии:

Только ответ – 0 баллов

Рассмотрен только частный случай, в котором описываемая ситуация невозможна – 0 баллов