

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025-2026 уч.год
8 класс

1. При каких значениях коэффициентов a, b, c три прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$, проведенные на координатной плоскости, пересекаются в точке $(2; 2)$?

Решение.

Подстановка координаты точки $(2; 2)$ в уравнения всех трех прямых приводит к системе

$$\begin{cases} 2a + b = 2, \\ 2b + c = 2, \\ 2c + a = 2. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения и получим

$$3a + 3b + 3c = 6$$

$$a + b + c = 2$$

Приравняем левые части полученного уравнения и первого уравнения.

$$a + b + c = 2a + b$$

Получим

$$a = c$$

Аналогично $b = c$. Тогда $3a = 2$,

$$a = b = c = \frac{2}{3}$$

Ответ. $a = b = c = \frac{2}{3}$.

2. Имеется мешок с 25 кг сахарного песка, рычажные весы, гиря в 1 кг и несколько чашек. Можно ли за два взвешивания отмерить 19 кг сахара?

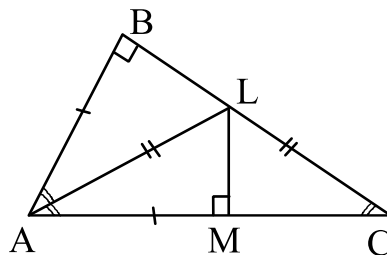
Решение.

Это возможно. Первым взвешиванием делим весь сахар на две части 12 и 13 кг. Для этого на одну чашу весов кладем гирю 1 кг и высыпаем весь сахар на весы так, чтобы весы оказались в равновесии. Вторым взвешиванием делим 12 кг поровну, уравновесив две части на весах. Получаем 6 кг сахара. Сложив 13 кг и 6 кг, получаем 19 кг сахара.

Ответ. Это возможно.

3. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна длине отрезка LC , $AC = 2AB$ (точка L лежит на BC). Найдите величину угла ABC .

Решение.



Отметим на AC точку M – середину AC . Треугольники ABL и ALM равны, так как у них есть равные углы при вершине A , и равны стороны: AL – общая сторона, $AB = AM$ по условию. В равнобедренном треугольнике ALC $AL = LC$ по условию, поэтому медиана LM является и высотой. Получили, что угол LMA прямой, откуда угол ABC в треугольнике ABL тоже прямой.

Ответ. 90° .

4. 12 студентов ответили на вопросы экзаменационного теста. Известно, что каждый студент ответил правильно на все вопросы, кроме четырех, и на каждый вопрос правильно ответили все студенты, кроме трех. Сколько вопросов в тесте?

Решение. Пусть в тесте n вопросов. Посчитаем двумя способами количество пар "студент – вопрос, на который дан верный ответ".

Один студент ответил верно на $n - 4$ вопроса, поэтому число верных ответов равно $12(n - 4)$.

На каждый вопрос ответили верно 9 студентов, потому общее число верных ответов равно $9n$.

Получаем, что $12(n - 4) = 9n$, откуда $n = 16$.

Ответ. 16.

5. На какую максимальную степень числа 3 делится число

$$3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot 3333 \cdot 33333 \cdot 333333 \cdot 3333333 \cdot 33333333 \cdot 333333333 \cdot 3333333333 ?$$

Написано произведение десяти чисел, в каждом из которых на одну цифру 3 больше предыдущего

Решение.

$$3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot 3333 \cdot 33333 \cdot 333333 \cdot 3333333 \cdot 33333333 \cdot 333333333 \cdot 3333333333$$

$$3^{10} \cdot (1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot 1111 \cdot 11111 \cdot 111111 \cdot 1111111 \cdot 11111111 \cdot 111111111 \cdot 1111111111)$$

В произведении, написанном в скобках, числа 111, 111111 делятся на 3 (сумма цифр делится на 3 и не делится на 9), и число 111111111 делится на 9:

$$111111111 = 9 \cdot 12345679$$

Число 12345679 на 3 не делится, его сумма цифр равна 37.

В итоге получается 14 троек в произведении.

Ответ. Число делится на 3^{14} и не делится на 3^{15} .

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.

Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.

Не забудьте обосновать свои решения задач!