

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2025-2026 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин.

Задача 5.3 была предложена Д.Н. Оскорбиным, 6.2 – С.Е. Бойченко, 6.3 – А.А. Чироновым, 7.2 – А.В. Резниковым.

8 класс

8.1. Из цифр 0, 1, 2, ..., 9 составили два пятизначных числа A и B (все цифры использованы, на 0 число начинаться не может). Может ли оказаться так, что число A делится на каждую цифру числа B , кроме 0, а число B делится на каждую цифру числа A ?

Ответ. Может.

Решение. Например, подойдут числа $A=49518$, $B=76320$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Любой правильный пример – 7 баллов.

8.2. Среди 18 человек 9 лжецов (они всегда лгут) и 9 рыцарей (они всегда говорят правду). Каждому из них дали конверт, причём ровно в 9 из них положили открытку. У людей спросили, есть ли у них в конверте открытка. Могло ли оказаться, что 9 из них ответили «да», а 9 ответили «нет»?

Ответ. Не может.

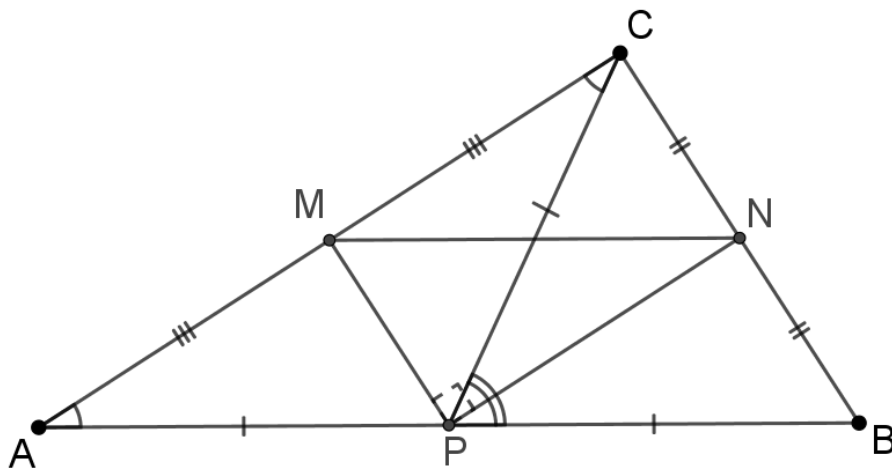
Решение. Пусть сначала ни у кого не было открытки, тогда мы получим 9 ответов «да» и 9 ответов «нет». Будем давать по очереди 9 людям открытки. При выдаче открытки любой человек (лжец или рыцарь) изменит свой ответ на противоположный. То есть произойдет 9 смен ответов. Но так как и после выдачи открыток оказалось 9 ответов «да» и 9 ответов «нет», то количество смен ответов должно быть чётным. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8.3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка P . Оказалось, что угол APC в два раза больше угла ABC , угол BPC в два раза больше угла BAC . Найдите PC , если $MN = 2$, где точка M – середина стороны AC , а точка N – середина стороны BC .

Ответ. 2.

Решение. Внешний угол BPC треугольника APC равен сумме углов PAC и PCA . По условию, угол BPC в два раза больше угла PAC , значит, углы PAC и PCA равны, и тогда $PA = PC$. Аналогично $PB = PC$. Следовательно, треугольники APC и BPC являются равнобедренными и в них медианы PM и PN являются и биссектрисами, и высотами, значит, углы PMC , PNC – прямые. Угол MPN – прямой как сумма половин двух смежных углов APC и BPC . Тогда в четырёхугольнике $MPNC$ углы MPN , PMC , PNC – прямые, откуда $MPNC$ – прямоугольник. Тогда $MN = PC = 2$ как диагонали прямоугольника.



Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказана равнобедренность одного из треугольников – 3 балла.

8.4. Олег утверждает, что какие бы 100 попарно различных натуральных чисел ему не дали, он может выложить их в ряд так, что среди сумм соседних чисел встретится не менее N составных. Какое наибольшее значение может принимать N ?

Ответ. 98.

Решение. Если все числа одной четности, то все суммы будут чётными числами (большими 2), а, значит, составными. Иначе, расставив сначала все чётные, а затем все нечётные числа, Олег гарантирует, что 98 из 99 сумм точно будут чётными числами. Покажем, что 99 составных чисел можно получить не всегда. Пусть Олегу дали набор чисел $1, p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_{99} - 1$, где $p_1, p_2, \dots, p_{99}$ – различные нечётные простые числа. Тогда как бы ни выкладывал числа Олег, число 1 вместе со своим соседом в сумме будет давать простое число.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что можно сделать 98 составных сумм – 4 балла.

Доказано, что 99 составных сумм можно сделать не всегда – 3 балла.

8.5. Можно ли выбрать числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ так, что произведения $a_1 a_2 a_3 a_4, a_2 a_3 a_4 a_5, \dots, a_8 a_9 a_{10} a_1, a_9 a_{10} a_1 a_2, a_{10} a_1 a_2 a_3$, записанные в некотором порядке, образовывали последовательные натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 10$?

Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим 5 произведений $a_1 a_2 a_3 a_4, a_3 a_4 a_5 a_6, a_5 a_6 a_7 a_8, a_7 a_8 a_9 a_{10}, a_9 a_{10} a_1 a_2$. Если их перемножить, мы получим произведение, в котором каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ участвует дважды, то есть равно $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10})^2$. Аналогично, оставшиеся 5 произведений при перемножении дадут $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10})^2$. Это означает, что 10 произведений можно разбить на две группы по 5 с одинаковым произведением. Но числа от 1 до 10 нельзя разбить на две группы по 5 чисел с одинаковым произведением, так как, например, среди них есть простое число 7, а никакое другое из них на 7 не делится.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.