

**МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ
(КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)
Максимальное количество баллов – 42 балла**

Решения и критерии

1. Представьте число 2025 в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

Решение. Например, так: $2025=1013^2-1012^2$ (мы воспользовались равенством, что $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$). Есть много других примеров: одна из основ конструкции – пифагорова тройка.

Критерии. Верный пример – **7 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

2. У Федоры в сундуке вперемешку лежат чулки: целые – их 60 %, и с дырками – их 40 %. Когда Федора достала из сундука каких-то три чулка, процент чулок с дырками среди оставшихся вырос до 50 %. Сколько чулок могло быть в сундуке первоначально?

Ответ. 5 или 15 чулок. **Решение.** Пусть в ящике было x чулок, тогда целых из них – $0,6x$, а с дырками – $0,4x$. После вытаскивания трех чулок из ящика чулок целых и с дырками стало поровну. Однако, вытащенные Федорой чулки могли быть «разного качества». Рассмотрим 4 случая:

Вытащили целых	Вытащили с дырками	Стало целых	Стало с дырками
3	0	$0,6x - 3$	$0,4x$
2	1	$0,6x - 2$	$0,4x - 1$
1	2	$0,6x - 1$	$0,4x - 2$
0	3	$0,6x$	$0,4x - 3$

Приравнивая выражения третьего и четвертого столбиков, получим четыре уравнения: 1) $0,6x - 3 = 0,4x$, откуда $x=15$; 2) $0,6x - 2 = 0,4x - 1$, откуда $x=5$; 3) и 4) уравнения имеют отрицательные корни, что нам не подходит.

Замечание: можно было ограничиться рассмотрением только первого и второго случаев. Т.к. доля чулок с дырками возросла, то среди трёх вытащенных чулок целых было больше.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**. Ход решения верный, рассмотрены все случаи, но допущена арифметическая ошибка – **5 баллов**. Рассмотрены не все случаи – **3 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

3. В классе из 26 человек учатся только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Когда учащиеся на первом уроке расселись за парты, каждый из них сказал: «Я сижу с лжецом». На следующем уроке они сели в новой комбинации. Мог ли после этого каждый сказать: «Я сижу с рыцарем»? Поясните свой ответ. Каждый раз за любой партой сидело ровно двое учащихся.

Ответ. Не мог. **Решение.** Фраза «Я сижу с лжецом» могла быть произнесена только в том случае, если за одной партой сидят лжец и рыцарь. Это означает, что рыцарей и лжецов поровну, т.е. по 13 человек. Вторая фраза «Я сижу с рыцарем» могла быть сказана только, если за одной партой сидят либо два рыцаря, либо два лжеца. Но тогда число рыцарей и число лжецов должно быть четным. А 13 – число нечетное.

Критерии. Приведены верные рассуждения, получен верный ответ – 7 баллов. Сделан верный вывод на основании условия, что в классе рыцарей и лжецов поровну, но дальнейших продвижений нет или они ошибочны – 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $AB = BC = BD$, $\angle CAD = \angle BDC$ и $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите углы этого четырёхугольника.

Ответ. $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $\angle D = 120^\circ$.

Решение. Пусть $\angle CAD = \angle BDC = x$, $\angle ABD = \angle ACB = y$. Треугольник ABC равнобедренный, значит $\angle BAC = \angle ACB = y$, тогда $\angle BAD = x + y$. Но треугольник ABD тоже равнобедренный, а его угол при вершине равен y , значит его углы при основании равны $90 - 0,5y$.

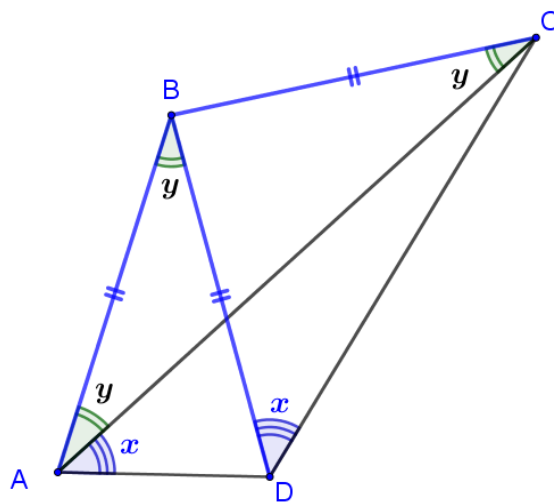
Имеем: $90 - 0,5y = x + y$, откуда $x + 1,5y = 90$.

Треугольник DBC также является равнобедренным с углом при основании, равным x , тогда угол $DBC = 180 - 2x$. Сумма углов треугольника ABC равна $3y + 180 - 2x = 180$, откуда $2x = 3y$.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} x + 1,5y = 90; \\ 2x = 3y. \end{cases}$ Получим $x = 45$, $y = 30$. Тогда

$\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $\angle D = 120^\circ$.

Критерии. Верное решение – 7 баллов. Ход решения верный, но допущена арифметическая ошибка – 5 баллов. Введены неизвестные и с



помощью верных рассуждений получено хотя бы одно из равенств на две неизвестные, но дальнейших продвижений нет – **2 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

5. Обычную шахматную доску 8×8 распилили по линиям сетки на 10 прямоугольников. Докажите, что среди них найдутся два с одинаковым периметром.

Решение. Все прямоугольники состоят из целого числа клеток, поэтому имеют четный периметр. Предположим, что все периметры различны. Упорядочим их по возрастанию: $P_1 < P_2 < \dots < P_{10}$, причём $P_1 \geq 4$, $P_2 \geq 6$, ..., $P_{10} \geq 22$. Существует только один прямоугольник с периметром 4, его площадь $S_1 = 1$; существует только один прямоугольник периметра 6, его площадь $S_2 = 2$. Для остальных прямоугольников с периметрами 8, 10, 12, ..., 22 будем искать такой, площадь которого наименьшая из возможных и при этом длины его сторон не превосходят 8.

Докажем **вспомогательное утверждение**: из двух прямоугольников с одинаковым периметром меньшую площадь имеет тот, у которого стороны больше отличаются друг от друга.

Пусть имеется прямоугольник, у которого стороны равны a , его площадь $S = a^2$. Если мы рассмотрим прямоугольник с длинами сторон: $a+x$ и $a-x$, то его периметр остался прежним, площадь $S = (a+x)(a-x) = a^2 - x^2 < a^2$.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
S	1	2	3	4	5	6	7	8	16	24

Но тогда сумма площадей таких прямоугольников не меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7+8+16+24=66$. А площадь всей доски равна 64. А если периметры больше, то сумма площадей тем более больше, чем 64.

Значит наше предположение неверно, и среди 10 прямоугольников найдутся два с одинаковым периметром.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**. Ход рассуждений верный, вспомогательное утверждение сформулировано, но не обосновано – **6 баллов**. Если вспомогательное утверждение не сформулировано – до **4 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

6. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала Петя вписывает в каждую клетку таблицы 30×30 в некотором порядке натуральные числа от 1 до 900 так, чтобы каждое встречалось ровно один раз. После этого Вася отмечает три столбца. А затем Петя, увидев столбцы, отмеченные Васей, сам отмечает две строчки. После этого вычисляется сумма шести чисел,

стоящих на пересечении отмеченных строк и столбцов. Если сумма равна 3000, то выигрывает Петя, а иначе – Вася. Может ли Петя выиграть?

Ответ. Да, может. **Решение.** Пусть Петя в первую строчку запишет слева направо числа 100, 101, 102, ..., 129, а во вторую – также слева направо числа 900, 899, 898, ..., 871. Остальные клетки таблицы Петя может заполнить произвольно. Тогда пары чисел, стоящие в одном столбце в первых двух строках, имеют одинаковую сумму: $100+900=101+899=\dots=129+871=1000$.

Теперь, какие бы три столбца ни выбрал Вася, Петя должен выбрать первые две строчки. Сумма чисел на их пересечениях будет равна $1000 \times 3 = 3000$.

Критерии. Описан и обоснован верный алгоритм для Пети и для Васи – **7 баллов**. Алгоритм верный, но при обосновании алгоритма допущены неточности – **5 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.