

Задачи муниципального этапа 2025-2026 учебного года

8 класс

8.1. Доказать, что число $n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном n .

Решение. Заметим, что $n^3 + 17n = (n^3 - n) + 18n = (n-1)n(n+1) + 18n$. Выражение $(n-1)n(n+1)$ является произведением трёх последовательных натуральных чисел, которое делится на 6, из которых хотя бы одно чётно, а значит, делится на 2, и есть одно, которое делится на 3. Следовательно, $n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном n , что и требовалось доказать.

8.2. В олимпиаде по математике приняло участие более 55 и менее 60 школьников. При этом число мальчиков составило более 90% и менее 91% от числа девочек. Сколько мальчиков и сколько девочек приняло участие в олимпиаде? Укажите все возможные случаи.

Решение. Пусть x и y - число мальчиков и число девочек соответственно. Тогда $56 \leq x + y \leq 59$ и $0,9 < \frac{x}{y} < 0,91$. Откуда $0,9y < x < 0,91y$, $1,9y < x + y < 1,91y$. Тогда $1,9y < 59$ и $1,91y > 56$, а значит $29,3 < y < 31,05$. Если $y = 30$, то $27 < x < 27,3$, что невозможно. Если $y = 31$, то $27,9 < x < 28,1$, откуда $x = 28$.

Ответ: 31 девочка и 28 мальчиков.

8.3. После того, как учительница Марья Ивановна пересадила Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку со второго ряда на третий, а Машеньку с третьего ряда на первый, средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, увеличился на неделю, сидящих во втором ряду увеличился на две недели, а сидящих в третьем ряду уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидит в третьем ряду?

Решение. Пусть в третьем ряду сидит x человек. Так как средний возраст равен сумме возрастов, делённой на количество человек, то после пересаживания суммарный возраст детей на первом ряду увеличился на 12 недель, на втором ряду – увеличился на 24 недели, а на третьем ряду – уменьшился на $4x$ недель. Поскольку сумма возрастов всех учеников измениться не могла, то $4x = 12 + 24$, значит, $x = 9$.

Ответ: 9 человек.

8.4. На медиане BM треугольника ABC ($BM > \frac{AC}{2}$) отмечена точка K так, что $BK = \frac{AC}{2}$. Известно, что $\angle BMA = 60^\circ$. Доказать, что $AB = KC$.

Решение. На отрезке BM отметим точку N такую, что $MN=BK$. Тогда треугольник AMN - равносторонний, отсюда $AN=MC$, $\angle BNA=120^\circ$. Значит, треугольники ANB и CMK равны, отсюда $AB=CK$, что и требовалось доказать.

8.5. Алёша и Витя отправляются из пункта N в пункт M , расстояние между которыми равно 20 км. К сожалению, на двоих у них есть только один велосипед. Из N Алёша выезжает на велосипеде, а Витя выходит пешком. Алёша может оставить велосипед в любой точке дороги, продолжив путь пешком. Когда Витя дойдет до этой точки, он пересаживается на велосипед. Скорость Алёши пешком – 4 км/ч, на велосипеде – 15 км/ч. Скорость Вити пешком – 5 км/ч, на велосипеде – 20 км/ч. В какой точке Алёша должен оставить велосипед, чтобы в M они с Витей прибыли одновременно?

Решение. Обозначим за x (км) расстояние от N до точки, где Алёша оставляет велосипед. Тогда на весь путь Алёша затратит $\frac{x}{15} + \frac{20-x}{4}$ часов, а Витя затратит $\frac{x}{5} + \frac{20-x}{20}$ часов. Составляя и решая уравнение, находим $x=12$ (км).

Ответ: В 12 км от пункта N .