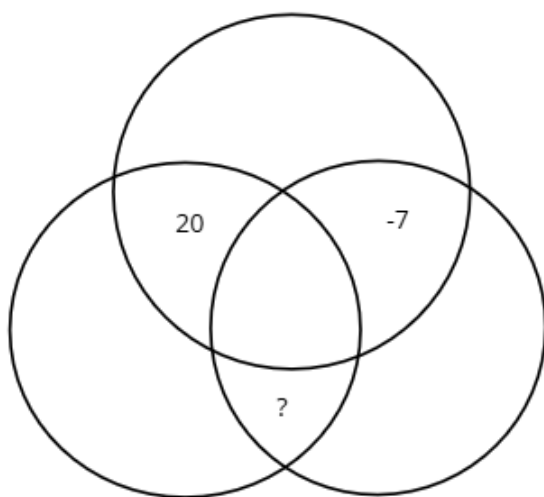


Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
Рязанская область

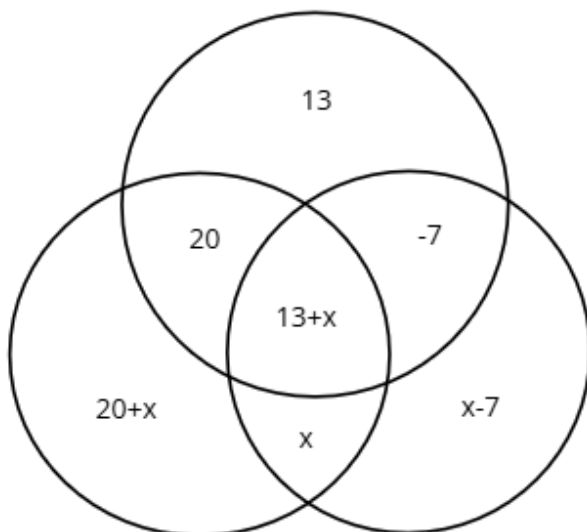
8 класс

1. На листе бумаги нарисованы три пересекающиеся окружности, они образуют 7 областей. Будем называть две области соседними, если у них есть общая граница. Области, граничащие ровно по одной точке, не являются соседними. В две области уже вписаны числа. Впишите в оставшиеся 5 областей целые числа так, чтобы в каждой области число равнялось сумме всех чисел в соседних областях.



Решение.

Обозначим искомое число за x . Тогда можно расставить числа и в остальных областях:



Сумма чисел в областях, окружающих x , должна быть равна x .

Запишем это:

$$(20+x)+(13+x)+(x-7)=x$$

$$2x+26=0$$

$$x=-13$$

Получили $x=-13$. Нетрудно проверить, что и для остальных областей условие задачи выполняется.

2. Гэндальф шел в гости к Бильбо Бэггину вверх по течению ручья со скоростью в полтора раза большей, чем скорость течения, держа в руках шляпу и палку. Он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжил путь с прежней скоростью. Вскоре он заметил ошибку, бросил в ручей палку и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шел вперед. Догнав шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел вверх по течению с первоначальной скоростью. Через 16 минут он встретил плывущую по ручью палку. На сколько раньше он пришел бы в гости, если бы не перепутал шляпу с палкой?

Решение.

Пусть скорость течения ручья равна x м/мин. Тогда скорость Гэндальфа по дороге в гости к Бильбо Бэггину равна $1,5x$ м/мин, скорость, с которой он бежал - $3x$ м/мин. Обозначим за t время в минутах, которое потребовалось ему на то, чтобы догнать шляпу, от момента, как он побежал назад. Тогда расстояние, на которое Гэндальф вернулся, равно $3xt$ м. Это расстояние будет равно сумме расстояния, которое он пройдет за 16 мин от момента, как он догнал шляпу, со скоростью $1,5x$ м/мин и расстояния, которое проплывет палка по ручью за время $(t+16)$ мин. со скоростью x м/мин.

Получаем уравнение $3xt=16*1,5x+(t+16)*x$, сократим на x , имеем $t=20$. Таким образом, на то, чтобы догнать шляпу, Гэндальф затратил 20 мин. Так как в обратном направлении он двигался со скоростью в два раза меньшей той, с которой он догонял шляпу, то чтобы вернуться ему требуется в два

раза больше времени, то есть 40 мин. Поэтому он пришел бы в гости на 1 час раньше, если бы не перепутал шляпу с палкой.

3. На листе бумаги написаны 14 последовательных целых чисел. После зачеркивания одного из них, сумма оставшихся чисел равняется 398. Какое число было вычеркнуто?

Решение.

Пусть числа $n, n+1, n+2, n+3, \dots, n+k-1, n+k, n+k+1, \dots, n+k+13$ последовательные 14 целых чисел, зачеркивается число $n+k$, $k=0,1,2, \dots, 13$.

Сумма чисел после зачеркивания равна

$$\frac{2n+13}{2} 14 - (n+k) = 398$$

$$(2n+13) * 7 - n - k = 398$$

$$13n - k = 307$$

$$k = 307 - 13n$$

Так как $k=0,1,2, \dots, 13$, то

$$0 \leq 13n - 307 \leq 13$$

$$307 \leq 13n \leq 320$$

$$\frac{307}{13} \leq 13n \leq \frac{320}{13}$$

$$23,61 \dots \leq n \leq 24,61 \dots$$

Так как числа целые, то $n=24$, а $k=5$. Таким образом, зачеркнутое число $n+k=29$.

4. Решите уравнение $f(f(f(x))) = x$, где $f(x) = 2x - 3$.

Решение.

По условию $f(x) = 2x - 3$. Вычислим $f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$:

$$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$$

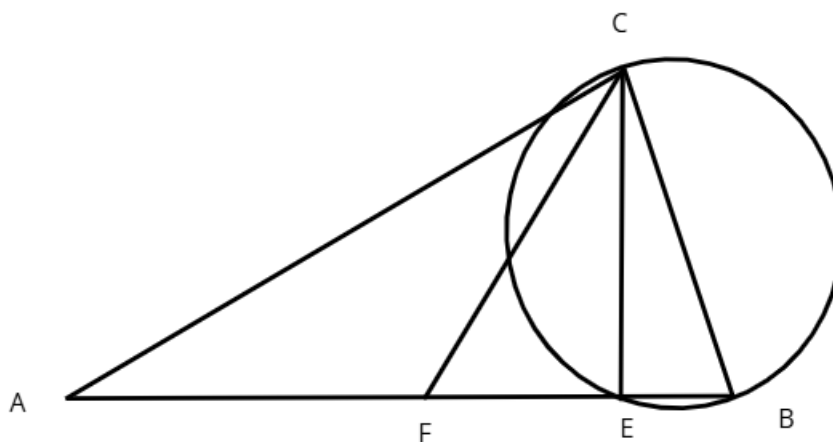
$$f(f(f(x))) = 2f(f(x)) - 3 = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$$

Тогда уравнение примет вид: $8x - 21 = x$. Отсюда находим $x=3$.

Ответ: $x=3$.

5. В прямоугольном треугольнике окружность, построенная на катете как на диаметре, отсекает от гипотенузы четвертую часть. Найдите длину гипотенузы, если длина этого катета равна 8.

Решение.



В прямоугольном треугольнике проведем медиану к гипотенузе CF. Так как $BE:AE=1:3$ (по условию), а F – середина AB, то имеем, что E – середина FB. Так как CB – диаметр окружности, то CE перпендикулярно FB.

Следовательно, треугольник CBF – равнобедренный, тогда $CB = CF = 8$.

Поскольку $AB = 2 \cdot CF$, то $AB = 16$.

Ответ: 16.