

8 класс

1. В физкультурном зале находятся тренер и несколько спортсменов. Возраст тренера на 40 лет больше среднего возраста спортсменов и на 35 лет больше среднего возраста всех присутствующих (включая его самого). Сколько спортсменов в зале?

Ответ: 7 спортсменов.

Решение. Пусть n — число спортсменов, s — их средний возраст. Тогда $s + 40$ — возраст тренера, и $ns + (s + 40)$ — сумма возрастов присутствующих в зале. Отсюда средний возраст всех присутствующих в зале равен, с одной стороны,

$$\frac{ns + s + 40}{n + 1} = s + \frac{40}{n + 1},$$

а с другой стороны, равен $s + 40 - 35 = s + 5$. Из уравнения $s + \frac{40}{n + 1} = s + 5$ находим $n = 7$. Следовательно, в зале находятся 7 спортсменов.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Правильно составлено уравнение — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Могут ли суммы цифр двух соседних натуральных чисел (то есть чисел n и $n + 1$) отличаться а) на 2024?; б) на 2025?

Ответ: а) могут; б) не могут.

а) Рассмотрим число $n = 10^{225} - 1$, десятичная запись которого состоит из 225 девяток. Сумма его цифр равна $225 \cdot 9 = 2025$, причём у числа $n + 1 = 10^{225}$ сумма всех цифр равна 1. Значит, суммы цифр этих чисел отличаются на 2024.

б) **Первое решение.** Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n . Рассмотрим две разности $A = S(n + 1) - S(n)$ и $B = S(n) - S(n + 1)$. По признаку делимости сумма цифр даёт тот же остаток при делении на 9, что и само число, то есть $S(n) \equiv n \pmod{9}$. Значит,

$$A \equiv (n + 1) - n = 1 \pmod{9}, \quad B \equiv n - (n + 1) = -1 \equiv 8 \pmod{9}.$$

Другими словами, суммы цифр соседних чисел отличаются только на числа, которые при делении на 9 дают остаток 1 или 8. Но число 2025 делится на 9 без остатка.

Второе решение. При переходе от n к $n + 1$ возможны два случая.

1. Последняя цифра n не равна 9. Тогда $S(n + 1) = S(n) + 1$, так как последняя цифра (и только она) увеличивается на 1. Значит, $S(n + 1) - S(n) = 1 \neq 2025$.

2. Число n оканчивается на k девяток ($k \geq 1$), то есть имеет вид $n = A999 \dots 9$, где A — число без завершающих девяток. Тогда $n + 1 = (A + 1) \cdot 10^k$ и суммы цифр чисел n и $n + 1$ равны $S(n) = S(A) + 9k$ и $S(n + 1) = S(A + 1)$. Значит,

$$S(n + 1) - S(n) = S(A + 1) - S(A) - 9k.$$

Так как A не оканчивается на 9, то $S(A + 1) - S(A) = 1$, поэтому $S(n + 1) - S(n) = 1 - 9k$. Отсюда следует, что $|S(n + 1) - S(n)| = 9k - 1 \neq 2025$ при целом k .

Критерии. Только ответы — 0 баллов. Правильный пример в пункте а) — 3 балла, решение пункта б) — 4 балла. В пункте б) пропущен один из случаев $S(n + 1) - S(n) \equiv \pm 1 \pmod{9}$ — не более 2 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \dots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \dots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наименьшей*, и укажите её значение.

Ответ: *наименьшая сумма 397.*

Решение. Рассмотрим девятизначное число $\overline{d_1 d_2 \dots d_9}$, составленное из всех цифр от 1 до 9 без повторений. Сумма всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами, равна

$$S = \overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_3} + \dots + \overline{d_8 d_9}.$$

Заметим, что в этой сумме каждая цифра, кроме первой и последней, участвует дважды: один раз в разряде десятков, другой — в разряде единиц. Поэтому

$$S = 10d_1 + 11(d_2 + d_3 + \dots + d_8) + d_9.$$

Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45, поэтому $d_1 + d_2 + \dots + d_9 = 45$, и значит, $d_2 + d_3 + \dots + d_8 = 45 - d_1 - d_9$. Подставив в выражение для S , получим $S = 10d_1 + 11(45 - d_1 - d_9) + d_9 = 495 - d_1 - 10d_9$.

Таким образом, сумма S зависит только от первой и последней цифр числа. Сумма S будет наименьшей, когда число $10d_9 + d_1 = \overline{d_9 d_1}$ наибольшее. Поскольку цифры различны, наибольшее значение $\overline{d_9 d_1}$ равно 98, то есть цифры d_9 и d_1 равны соответственно 9 и 8, при этом $S = 495 - 8 - 10 \cdot 9 = 397$. Итак, минимальная сумма $S = 397$ достигается для любого девятизначного числа, которое начинается с цифры 8 и заканчивается цифрой 9. Остальные цифры могут располагаться в *произвольном* порядке.

Пример такого числа: 812345679.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Выражение для S записано в виде $10d_1 + 11(d_2 + \dots + d_8) + d_9$ без дальнейшего продвижения — 1 балл. Получено выражение $S = 495 - d_1 - 10d_9$ без дальнейшего продвижения — 2 балла. Указано, что сумма S будет наименьшей, когда меньшие цифры входят в неё с большими коэффициентами, но отыскания максимума проведено с ошибками — 3 балла. При нахождении максимума $d_1 + 10d_9$ указаны недопустимые цифры (например, $d_1 = 9$ и $d_9 = 9$) — 4 балла. Правильно найдены $d_1 = 8$ и $d_9 = 9$, но не указано, что любое число с такими крайними цифрами даёт минимум, или есть мелкие недочёты в объяснении — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. Пятьдесят команд сыграли однокруговой турнир за 49 дней, каждая команда сыграла с каждой, играя по одному матчу в день. За победу в матче давали 3 очка, а за ничью — одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа её поражений, либо вдвое меньше числа её побед. Больше всех очков набрал «Зенит». Докажите, что и за два дня до конца соревнования у «Зенита» очков было больше, чем у любой другой команды.

Решение. Пусть некоторая команда n матчей проиграла и $2n$ матчей сыграла вничью. Тогда у неё всего $49 - 3n$ выигрышей, поэтому она набрала $3(49 - 3n) + 2n = 147 - 7n$ очков. Если же у команды n ничейных и $2n$ выигрышных матчей, то она набрала $n + 3 \cdot 2n = 7n$ очков.

Таким образом, у каждой команды количество набранных очков равно либо $147 - 7n = 7(21 - n)$, либо $7n$, то есть кратно 7. Следовательно, в конце турнира у «Зенита» хотя бы на 7 очков больше, чем у любой другой команды. За один турнирный день разница между количеством набранных очков у двух команд может измениться максимум на три очка, а за 2 дня — максимум на 6 очков. Отсюда следует требуемое утверждение.

Критерии. Доказано, что количество очков у каждой команды либо $147 - 7n$, либо $7n$ — 1 балл. Доказано, что у каждой команды количество очков кратно 7 — 3 балла. Доказано, что у «Зенита» хотя бы на 7 очков больше — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC угол C равен 60° . Биссектрисы углов A и B пересекают стороны BC и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AB = AQ + BP$.

Решение. (Рис. 1.) На стороне AB выберем точку R такую, что $AR = AQ$. Пусть E — точка пересечения биссектрис AP и BQ , а D — точка пересечения отрезков QR и AE .

Сумма углов A и B равна $180^\circ - \angle C = 120^\circ$. Значит, $\angle EAB + \angle EBA = 60^\circ$, поэтому $\angle AEB = 120^\circ$. Тогда $\angle PEB = 180^\circ - \angle AEB = 60^\circ$ и $\angle QEA = 180^\circ - \angle AEB = 60^\circ$.

Так как треугольник ARQ равнобедренный (по построению $AR = AQ$) и AE — биссектриса угла A , то AD также является медианой и высотой. Следовательно, $DQ = DR$ и $AD \perp QR$.

Рассмотрим треугольники AQE и ARE : $AQ = AR$, AE — общая сторона, $\angle QAE = \angle RAE$. Поэтому треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $QE = RE$, и значит, высота DE является биссектрисой в равнобедренном треугольнике QER и $\angle AEQ = \angle AER = 60^\circ$. Тогда $\angle QER = \angle QEA + \angle AER = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

Поскольку точки B , E , Q лежат на одной прямой, $\angle REB = 180^\circ - \angle QER = 60^\circ$. Таким образом, $\angle REB = \angle PEB = 60^\circ$.

В треугольниках EBP и EBR : BE — общая сторона, $\angle EBP = \angle EBR$ (так как BE — биссектриса), $\angle PEB = \angle REB = 60^\circ$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам, откуда $BP = BR$. Значит, $AB = AR + RB = AQ + BP$, что и требовалось.

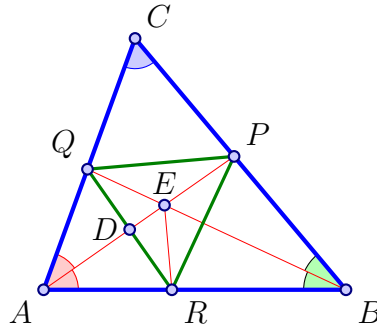


Рис. 1

Критерии. Доказано, что $\angle AEB = 120^\circ$ — 1 балл. На стороне AB выбрана точка R , $AR = AQ$, и доказано, что $AE \perp QR$ — 2 балла. Доказано, что $\angle PEB = \angle QEA = 60^\circ$ — 3 балла. Доказано, что $QE = RE$ — 4 балла. Вычисление $\angle REB = 60^\circ$ — 5 баллов. Установлено равенство треугольников EBP и EBR и $BP = BR$ — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.