

КЛЮЧИ

Время выполнения заданий – 235 мин.

Максимальное количество первичных баллов – 35, итоговых – 100.

1. На доске написано число 5. С числом, написанным на доске, можно выполнить следующее действие: представить его в виде суммы двух целых чисел, каждое из которых больше 1, затем эти два числа перемножить и записать результат умножения на доску вместо предыдущего числа. Затем с получившимся числом снова выполняется аналогичное действие и новое число записывается на доску вместо предыдущего и так далее. Можно ли через несколько действий получить на доске число 2025? Ответ обоснуйте.

Ответ: да, можно. Пример: $5 \xrightarrow{2 \cdot 3} 6 \xrightarrow{3 \cdot 3} 9 \xrightarrow{4 \cdot 5} 20 \xrightarrow{3 \cdot 17} 51 \xrightarrow{10 \cdot 41} 410 \xrightarrow{5 \cdot 405} 2025$.

Решение. Решим задачу методом обратного хода. Если из нового числа мы хотим получить предыдущее, то новое нужно представить в виде произведения двух целых чисел, больших 1, и эти числа сложить. Начнём с числа 2025. Представим его в виде $2025 = 5 \cdot 405$, тогда предыдущее равно $5 + 405 = 410$. Теперь представим 410 в виде $410 = 10 \cdot 41$, тогда предыдущее равно $10 + 41 = 51$. Далее, $51 = 3 \cdot 17$, $3 + 17 = 20$, $20 = 4 \cdot 5$, $4 + 5 = 9$, $9 = 3 \cdot 3$, $3 + 3 = 6$, $6 = 2 \cdot 3$, $2 + 3 = 5$. Пришли к первоначальному числу. Тогда, выполнив эти действия в обратном порядке, получим число 2025:

$$5 \xrightarrow{2 \cdot 3} 6 \xrightarrow{3 \cdot 3} 9 \xrightarrow{4 \cdot 5} 20 \xrightarrow{3 \cdot 17} 51 \xrightarrow{10 \cdot 41} 410 \xrightarrow{5 \cdot 405} 2025.$$

Замечание. Возможны и другие варианты:

$$\begin{aligned} &5 \xrightarrow{2 \cdot 3} 6 \xrightarrow{3 \cdot 3} 9 \xrightarrow{2 \cdot 7} 14 \xrightarrow{3 \cdot 11} 33 \xrightarrow{3 \cdot 30} 90 \xrightarrow{45 \cdot 45} 2025, \\ &5 \xrightarrow{2 \cdot 3} 6 \xrightarrow{3 \cdot 3} 9 \xrightarrow{2 \cdot 7} 14 \xrightarrow{5 \cdot 9} 45 \xrightarrow{6 \cdot 39} 234 \xrightarrow{9 \cdot 225} 2025, \\ &5 \xrightarrow{2 \cdot 3} 6 \xrightarrow{3 \cdot 3} 9 \xrightarrow{2 \cdot 7} 14 \xrightarrow{2 \cdot 12} 24 \xrightarrow{7 \cdot 17} 119 \xrightarrow{6 \cdot 113} 678 \xrightarrow{3 \cdot 675} 2025, \\ &5 \xrightarrow{2 \cdot 3} 6 \xrightarrow{2 \cdot 4} 8 \xrightarrow{2 \cdot 6} 12 \xrightarrow{5 \cdot 7} 35 \xrightarrow{5 \cdot 30} 150 \xrightarrow{15 \cdot 135} 2025, \\ &5 \xrightarrow{2 \cdot 3} 6 \xrightarrow{2 \cdot 4} 8 \xrightarrow{4 \cdot 4} 16 \xrightarrow{5 \cdot 11} 55 \xrightarrow{2 \cdot 53} 106 \xrightarrow{25 \cdot 81} 2025. \end{aligned}$$

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ с примером (достаточно одного примера) – 7 баллов.

Только ответ «да» без примера – 0 баллов.

2. Решите числовой ребус: $\overline{abc} + \overline{bca} + a = \overline{cab}$ (запись вида $\overline{abc}$ означает число, в десятичной записи которого слева направо следуют цифры a , b и c). Разным буквам соответствуют разные цифры. Укажите все возможные решения, объясните, как вы нашли неизвестные и почему нет других решений.

Ответ. $a = 3$, $b = 4$ и $c = 8$, то есть $348 + 483 + 3 = 834$.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
8 класс

Решение. Запишем этот пример в столбик:

$$\begin{array}{r} abc \\ + \\ bca \\ + \\ \hline cab \end{array}$$

Пронумеруем столбцы слева направо. Из первого столбца имеем $a < c$ и $b < c$. Так как внизу второго столбца стоит цифра a , а выше неё большая цифра c , то отсюда следует, что был перенос единицы в разряд сотен (двойка могла перенестись в разряд сотен, только если был перенос двойки в разряд десятков и $b = c = 9$, что невозможно), то есть

$$c = a + b + 1. \quad (1)$$

Так как внизу третьего столбца стоит цифра b , а выше неё большая цифра c , то отсюда следует, что был перенос единицы или двойки в разряд десятков, то есть возможны 2 варианта.

1) Если был перенос единицы в разряд десятков, то из второго столбца имеем

$$b + c + 1 = 10 + a, \quad (2)$$

а из третьего столбца имеем

$$c + 2a = 10 + b. \quad (3)$$

Подставив в равенство (3) выражение для c из (1), получим, что $3a + b + 1 = 10 + b$, следовательно, $a = 3$, $c = 3 + b + 1 = b + 4$. Подставив в равенство (2) предыдущие выражения для a и c , получим $b + (b + 4) + 1 = 13$, следовательно, $b = 4$ и $c = 8$.

2) Если был перенос двойки в разряд десятков, то из третьего столбца имеем

$$c + 2a = 20 + b. \quad (4)$$

Подставив в равенство (4) выражение для c из (1), получим, что $3a + b + 1 = 20 + b$, следовательно, $3a = 19$, что невозможно при целом a .

Критерии.

Обосновано получен верный ответ – 7 баллов.

Только ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Решение проведено перебором значений переменных, при этом перебор неполный, но с верным ответом – не более 5 баллов.

Если при неполном переборе пропущено более половины случаев, но ответ верный – не более 3 баллов.

Если при авторском решении пропущен случай с переносом двойки в разряд десятков – не более 5 баллов.

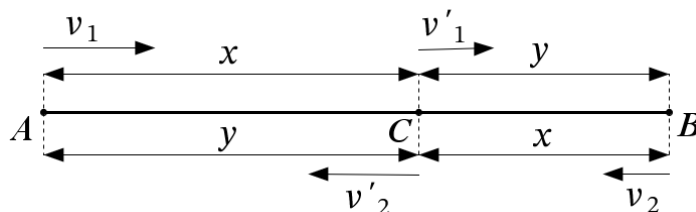
3. Из городов Андреевск и Борисовск, соединённых прямой дорогой, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и ехали с неизменными скоростями до момента встречи. В момент встречи первый автомобиль, выехавший из Андреевска, снизил свою скорость на 25%, а второй автомобиль увеличил свою скорость на 92%, после чего они продолжили ехать в тех же направлениях

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
8 класс**

с новыми скоростями остаток пути между городами и въехали в города Борисовск и Андреевск одновременно. На сколько процентов первоначальная скорость первого автомобиля была больше первоначальной скорости второго?

Ответ: на 60%.

Решение. Изобразим весь путь в виде отрезка AB , где точка A обозначает Алексеевск, а B – Борисовск. Пусть C – точка встречи автомобилей. Обозначим первоначальные скорости (в км/ч) первой и второго автомобилей через v_1 и v_2 соответственно, тогда после



момента встречи их скорости будут равны $v'_1 = \left(1 - \frac{25}{100}\right)v_1$ и $v'_2 = \left(1 + \frac{92}{100}\right)v_2$ соответственно, то есть $v'_1 = \frac{3}{4}v_1$ и $v'_2 = \frac{48}{25}v_2$. Обозначим через x и y время (в часах), затраченное автомобилями на путь до места встречи и на остаток пути соответственно. Заметим, что на одном и том же участке пути отношение скоростей автомобилей равно обратному отношению затраченного времени. На участке AC отношение скоростей первого и второго автомобилей $\frac{v_1}{v_2}$ равно обратному отношению затраченного

ими времени $\frac{y}{x}$; на участке BC отношение скоростей первого и второго автомобилей $\frac{v'_1}{v'_2}$ равно обратному отношению затраченного ими времени $\frac{x}{y}$. Таким образом, имеем два равенства: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{y}{x}$ и

$\frac{\frac{3}{4}v_1}{\frac{48}{25}v_2} = \frac{x}{y}$. Перемножив эти равенства, получим $\frac{3}{4} \cdot \frac{25}{48} \cdot \frac{v_1^2}{v_2^2} = 1$, то есть $\frac{25}{64} \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = 1$, следовательно,

$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$. Таким образом, $v_1 = \frac{8}{5}v_2 = 1,6v_2$, отсюда получаем, что v_1 больше v_2 на 60%.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Ход решения и все используемые формулы верны, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 5-6 баллов.

4. На Острове рыцарей и лжецов живут только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. У каждого жителя острова есть ровно три друга. Однажды 8 жителей этого острова собрались за круглым столом и сели так, что у каждого человека за столом один его друг сидел слева от него, другой друг сидел справа, а третий друг сидел ровно напротив него. Каждый из сидящих за столом произнёс одну из фраз «Среди моих друзей рыцарей больше, чем лжецов» и «Среди моих друзей лжецов больше, чем рыцарей». Докажите, что обязательно найдутся двое рядом сидящих людей, которые сказали одинаковые фразы.

Решение. Предположим, что это не так, то есть фразы сидящих за столом чередуются. Очевидно, что все сидящие не могут быть лжецами, так как в этом случае половина из них скажут правду. Следовательно, есть хотя бы один рыцарь. Пронумеруем его цифрой 1.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году**

8 класс

Предположим, что он сказал первую фразу. Тогда по крайней мере один из его соседей – рыцарь (в противном случае среди его друзей 2 лжеца, следовательно, рыцарь солгал). Этого рыцаря пронумеруем цифрой 2 и будем считать, что он сидит слева от 1-го, тогда всех остальных пронумеруем по ходу часовой стрелки от 3 до 8 (в противном случае нумерация будет против часовой стрелки, этот случай симметричен первому).

Человек №2 (рыцарь) сказал, что среди его друзей лжецов больше и это правда, но так как его друг №1 – рыцарь, то двое других должны быть лжецами, то есть №3 и №6 – лжецы.

Человек №3 (лжец) сказал, что среди его друзей рыцарей больше и это ложь, то есть на самом деле среди его друзей больше лжецов, но так как его друг №2 – рыцарь, то двое других должны быть лжецами, то есть №4 и №7 – лжецы.

Человек №4 (лжец) сказал, что среди его друзей лжецов больше и это ложь, то есть на самом деле среди его друзей больше рыцарей, но так как его друг №3 – лжец, то двое других должны быть рыцарями, то есть №5 и №8 – рыцари.

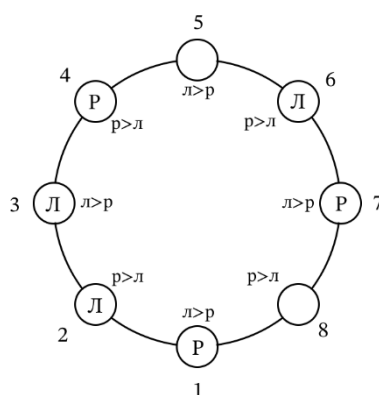
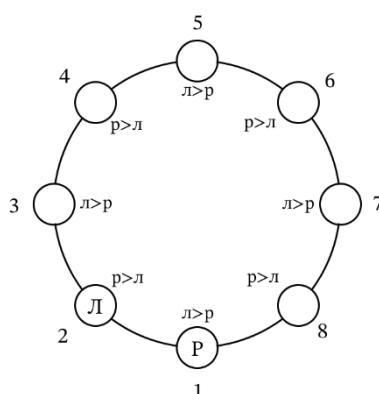
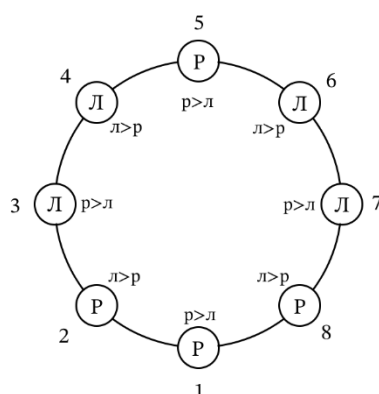
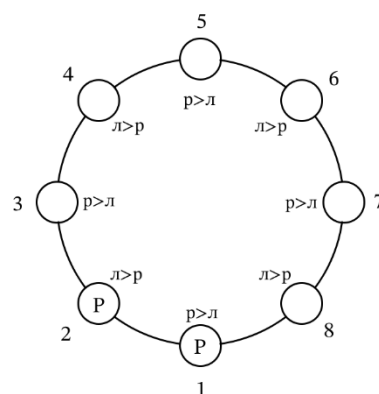
Человек №5 (рыцарь) сказал, что среди его друзей рыцарей больше, но так как его друзья №4 и №6 – лжецы, то он солгал, получили противоречие. Следовательно, наше предположение о том, что рыцарь №1 сказал первую фразу, неверно, то есть ни один рыцарь не мог сказать первую фразу.

Теперь рассмотрим случай, когда рыцарь №1 сказал вторую фразу. Тогда по крайней мере один из его соседей – лжец (в противном случае среди его друзей 2 рыцаря, следовательно, рыцарь солгал). Этого лжеца пронумеруем цифрой 2 и будем считать, что он сидит слева от 1-го, тогда всех остальных пронумеруем по ходу часовой стрелки от 3 до 8 (в противном случае нумерация будет против часовой стрелки, этот случай симметричен первому).

Человек №2 (лжец) сказал, что среди его друзей рыцарей больше и это ложь, то есть на самом деле среди его друзей больше лжецов, но так как его друг №1 – рыцарь, то двое других должны быть лжецами, то есть №3 и №6 – лжецы.

Человек №3 (лжец) сказал, что среди его друзей лжецов больше и это ложь, то есть на самом деле среди его друзей больше рыцарей, но так как его друг №2 – лжец, то двое других должны быть рыцарями, то есть №4 и №7 – рыцари.

Человек №4 (рыцарь) сказал, что среди его друзей рыцарей больше, но ранее мы доказали, что такое невозможно, получили противоречие.



**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
8 класс**

Таким образом, наше первоначальное предположение о том, что фразы сидящих за столом чередуются, неверно, а это и означает, что какие-то двое, сидящие рядом, скажут одинаковые фразы.

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

Пропущены важные случаи – от 2 до 5 баллов.

5. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC выбраны точки D и E соответственно так, что $AD = AB = BE$, $\angle CBD = 2\angle CAE$ и $\angle C = 3\angle CAE$. Найдите все углы треугольника CDE .

Ответ: $\angle DCE = 36^\circ$, $\angle CDE = 42^\circ$, $\angle CED = 102^\circ$.

Решение. Пусть $\angle CAE = \alpha$, тогда $\angle CBD = 2\alpha$, $\angle C = 3\alpha$. Угол AEB – внешний угол треугольника ACE , следовательно, $\angle AEB = \angle CAE + \angle C = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$. Треугольник ABE – равнобедренный, поэтому $\angle BAE = \angle AEB = 4\alpha$, а значит, $\angle BAC = \angle BAE + \angle CAE = 4\alpha + \alpha = 5\alpha$. Угол ADB – внешний угол треугольника BCD , следовательно, $\angle ADB = \angle CBD + \angle BCD = 2\alpha + 3\alpha = 5\alpha$. Треугольник ABD – равнобедренный ($AB = AD$), поэтому $\angle ABD = \angle ADB = 5\alpha$. Таким образом, $\angle BAD = \angle ABD = \angle ADB$, следовательно, треугольник ABD – равносторонний и все его углы равны 60° , а значит, $5\alpha = 60^\circ$ и $\alpha = 12^\circ$. Кроме того, $BD = AB$, следовательно, $BD = BE$, то есть треугольник BDE – равнобедренный и

$$\angle BDE = \angle BED = \frac{180^\circ - \angle DBE}{2} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

Тогда

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - (5\alpha + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ - 4\alpha = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ.$$

$$\angle DCE = 3\alpha = 36^\circ, \angle CED = 180^\circ - (\angle CDE + \angle DCE) = 180^\circ - (42^\circ + 36^\circ) = 102^\circ.$$

Критерии.

Обоснованно получены все три угла – 7 баллов.

Доказано, что треугольник ABD – равносторонний, при этом ни один из искомых углов не найден – 3 балла.

Обоснованно получен угол DCE , при этом другие искомые углы не найдены – 4 балла.

Обоснованно получен угол DCE и доказано, что треугольник BDE – равнобедренный, при этом хотя бы один из остальных углов треугольника CDE найден неверно из-за вычислительной ошибки – 5 баллов.

