

Условия и решения задач

8.1 Какое из чисел больше:

$$\frac{22222225}{22222228} \quad \text{или} \quad \frac{33333334}{33333337}?$$

Ответ: $\frac{33333334}{33333337}$.

Решение.

$$\frac{22222225}{22222228} = 1 - \frac{3}{22222228}; \quad \frac{33333334}{33333337} = 1 - \frac{3}{33333337}.$$

Т. к. $33333337 > 22222228$, то

$$\frac{3}{22222228} > \frac{3}{33333337}$$

Значит,

$$\frac{22222225}{22222228} < \frac{33333334}{33333337}$$

□

8.2 На доске в ряд выписаны 2025 чисел, причем каждое число, кроме двух крайних, равно сумме двух соседних с ним чисел. Известно, что сумма первых ста чисел в этом ряду равна нулю, а сумма первых двухсот чисел в этом ряду равна трём. Найдите сумму всех чисел в этом ряду.

Ответ: 2.

Решение. Пусть первое число равно x , а второе — y . Тогда последовательность имеет вид:

$$x, y, y - x, -x, -y, x - y, x, y, \dots$$

Видно, что числа повторяются с периодом 6, причём сумма любых шести подряд идущих чисел равна 0.

Обозначим S_n — сумму первых n чисел последовательности.

Число 100 при делении на 6 даёт остаток 4, поэтому

$$S_{100} = S_4 = x + y + (y - x) + (-x) = 2y - x = 0.$$

Число 200 даёт остаток 2:

$$S_{200} = S_2 = x + y = 3.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2y - x = 0, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

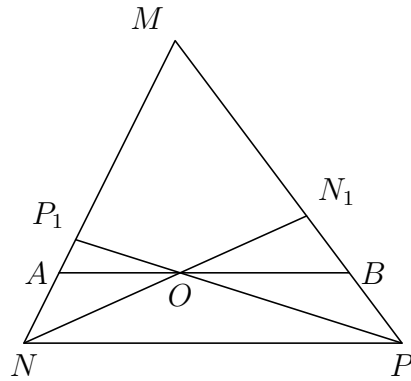
получаем $x = 2, y = 1$.

Так как число 2025 при делении на 6 даёт остаток 3, то

$$S_{2025} = S_3 = x + y + (y - x) = 2y = 2.$$

□

8.3 В треугольнике MNP через точку O пересечения биссектрис параллельно стороне NP проведена прямая, пересекающая стороны MN и MP в точках A и B соответственно. Найдите периметр треугольника ABM , если $MN = 1, MP = 2$.



Ответ: 3.

Решение.

$\angle POB = \angle OPN$ (как накрест лежащие), $\angle OPB = \angle OPN$ (по условию), следовательно, треугольник POB равнобедренный и $OB = BP$. Аналогично, $OA = AN$. Тогда

$$AM + MB + AB = AM + MB + AN + BP = MN + MP = 3.$$

□

8.4 Про некоторую компанию людей известно, что любые два человека, у которых одинаковое количество друзей в этой компании, не имеют общих друзей. Докажите, что в этой компании найдётся человек, у которого ровно один друг. (Предполагается, что по крайней мере одна пара друзей в этой компании имеется).

Решение. Рассмотрим человека M с наибольшим числом друзей, пусть их у него n . Каждый из них имеет не более n друзей. С другой стороны все они имеют общего друга M , поэтому число друзей у всех них различно. Таким образом, среди них будет по одному человеку с $1, 2, \dots, n$ друзьями. □

8.5 Имеется 16 монет, все разного веса. Можно ли с помощью чашечных весов (без гирь) за 18 взвешиваний выбрать из них две наиболее тяжелые?

Ответ: да.

Решение. Разобьем 16 монет на 8 пар и попарно взвесим, отбирая из каждой пары наиболее тяжелую. Оставшиеся 8 монет разбиваем на 4 пары и проделываем аналогичные взвешивания. И так далее. Тогда самую тяжелую монету определим за $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ взвешиваний. Вторая по тяжести монета находится среди тех четырех монет, с которыми во время вышеописанной процедуры отбора взвешивалась самая тяжелая монета. Самая тяжелая из них определяется за $2 + 1 = 3$ взвешивания. □