

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

8 класс

1. При каком наибольшем натуральном n выражение $\sqrt{2025+n} - \sqrt{n}$ принимает целое значение?

Решение:

Обозначим исходное выражение

$$\sqrt{2025+n} - \sqrt{n} = t \in \mathbb{Z}$$

Тогда

$$\sqrt{2025+n} = t + \sqrt{n}$$

Возведём обе части в квадрат:

$$2025 + n = t^2 + 2t\sqrt{n} + n$$

$$t^2 + 2t\sqrt{n} - 2025 = 0$$

$$2t\sqrt{n} = 2025 - t^2$$

$$\sqrt{n} = \frac{2025 - t^2}{2t}$$

$$\sqrt{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2025 - t^2}{t} \right)$$

$$\sqrt{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2025}{t} - \frac{t^2}{t} \right)$$

$$\sqrt{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2025}{t} - t \right)$$

Возведём обе части в квадрат:

$$n = \frac{1}{4} \left(\frac{2025}{t} - t \right)^2$$

По условию n -натуральное число, т.е. должно принимать целое неотрицательное значение, значит t является делителем числа 2025.

Можно подставить различные делители числа 2025 и подобрать нужное. Но как видно, наибольший делитель будет равен 2025. Поэтому

$$n = \frac{1}{4} \left(\frac{2025}{2025} - 2025 \right)^2 = \frac{2024^2}{4} = 1024144.$$

Ответ: 1024144

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности (например, не указано явно, что полученные значения не являются целыми числами, но вычисления логичны).
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная вычислительная ошибка.
4	Решение содержит незначительные погрешности в преобразовании выражения,

	некоторые переходы не обоснованы, но общая структура решения верна и дан верный ответ.
3	Дан верный ответ, но ясного обоснования решение не содержит.
2	Приведены идеи для решения, но не доведены до конца.
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований.
0	Решение отсутствует или решение показывает незнание соответствующего материала.

2. В шахматном турнире приняли участие обучающиеся двух классов, причем обучающихся одного класса было в 10 раз больше, чем обучающихся другого класса. Каждый участник турнира встречался с любым другим только раз. При подведении итогов турнира оказалось, что обучающиеся класса с большим числом участников набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем обучающиеся другого класса вместе. Сколько очков набрали обучающиеся класса с меньшим числом участников?

Решение.

1 способ.

Пусть в турнире участвовало x обучающихся одного класса с меньшим числом участников.

Тогда – $10x$ обучающихся другого класса с большим числом участников.

Таким образом всего участвовало $x + 10x = 11x$.

Число сыгранных партий, а также и количество всех очков, набранных всеми участниками, равно

$$\frac{11x(11x - 1)}{2}.$$

Пусть меньший класс набрал S очков, тогда больший класс набрал $4,5S$ очков. Так как эти очки поделены между классами в отношении 1:4,5, то класс с меньшим числом участников набрал

$$\begin{aligned} S + 4,5S &= \frac{11x(11x - 1)}{2} \\ 5,5S &= \frac{11x(11x - 1)}{2} \\ S &= \frac{11x(11x - 1)}{2} / 5,5 \end{aligned}$$

$S = x(11x - 1)$ очков, а другой класс – $\frac{9x(11x-1)}{2}$ очков.

S – сумма очков x участников малого класса, каждый из которых сыграл с каждым из $11x - 1$ других участников.

Максимум очков, который может набрать малый класс: если все x участников победили всех $10x$ участников большого класса и сыграли между собой – тогда очки от игр внутри малого класса: $x(x - 1)/2$ очков распределены между ними, плюс $x \cdot 10x = 10x^2$ очков от побед над большим классом. Но нам дано конкретное $S = x(11x - 1)$.

Получим неравенство:

$$x(11x - 1) \leq \frac{x(x-1)}{2} + 10x^2 \text{ или } x^2 \leq x.$$

Поскольку $x > 0$, то $x \leq 1$. Так как x – целое число и больше нуля, то $x = 1$. Значит, класс с меньшим числом участников набрал очков:

$$x(11x - 1) = 1(11 - 1) = 10.$$

Ответ: 10.

2 способ.

1) Пусть в турнире участвовало x обучающихся одного класса с меньшим числом участников.

Тогда – $10x$ обучающихся другого класса с большим числом участников.

Таким образом всего участвовало $x + 10x = 11x$.

2) По условию задачи каждый участник турнира встречается (играет) с любым другим только один раз. Значит речь идёт о круговом турнире.

3) Определим общее количество сыгранных партий в круговом турнире.

Если в турнире участвует n человек, то каждый из n участников может сыграть с $(n-1)$ другими участниками. Таким образом партий $n(n-1)$.

Но т.к. каждая партия проходит между двумя участниками, то при подсчёте мы учитываем каждого участника дважды $\Rightarrow$ полученное количество партий $n(n-1)$ нужно разделить на 2.

Значит общее количество партий в круговом турнире:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

4) Используя данную формулу, найдём общее количество партий в нашей задаче:

$$S_{\text{общ.}} = \frac{11x(11x-1)}{2}$$

5) Общее количество очков, набранных всеми участниками, равно общему количеству партий ($S_{\text{общ.}} = \frac{11x(11x-1)}{2}$), т.к. за победу даётся 1 очко, за ничью – $\frac{1}{2}$ очка, а за поражение – 0 очков. Значит сумма очков за одну партию всегда равна 1.

6) Пусть S_1 – сумма очков, набранных обучающимися из класса с меньшим числом участников.

Тогда S_2 – сумма очков, набранных обучающимися из класса с большим числом участников: $S_2 = 4,5S_1$

7) Таким образом общая сумма очков: $S_{\text{общ.}} = S_1 + S_2 = S_1 + 4,5S_1 = 5,5S_1$

8) В пунктах 4 и 7 речь идёт об общем количестве набранных очков за турнир.

Приравняем выражения из данных пунктов:

$$\frac{11x(11x-1)}{2} = 5,5S_1$$

Найдём S_1 (общую сумму очков, набранных обучающимися из класса с меньшим числом участников):

$$S_1 = \frac{11x(11x-1)}{11}$$
$$S_1 = x(11x-1)$$

9) Если $x=1$ (т.е. один человек из класса с меньшим числом участников), то:

$$S_1 = 1(11 \cdot 1 - 1) = 10$$

Если бы было $x=2$ (т.е. два человека из класса с меньшим числом участников), то они бы сыграли друг с другом. По правилам турнира каждый из них должен был бы выиграть эту партию, что невозможно, т.к. партия может иметь только одного победителя. Значит в турнире был только один человек из класса с меньшим числом участников. Таким образом он набрал 10 очков.

Ответ: 10.

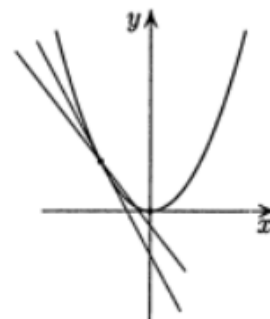
Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности.
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная вычислительная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно; или имеются погрешности в применении символики и терминологии
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3	Верно составлена математическая модель, но участник не смог продвинуться дальше к решению ИЛИ Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
2	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца, общая математическая модель не построена
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении или приведен ответ без решения.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

3. Пусть $0 < a < b < c < d$. Докажите, что многочлены $x^4 + bx + c$ и $x^4 + ax + d$ не имеют общих корней.

Решение:

Краткое решение. В силу положительности коэффициентов, многочлены $x^4 + bx + c$ и $x^4 + ax + d$ не имеют положительных корней. А поскольку их разность $(b - a)x + c - d$ – линейная функция, их графики пересекаются в одной точке. Так как разность отрицательна при $x=0$ и положительна при $x \rightarrow +\infty$, эта точка пересечения лежит правее оси ординат.



1 способ. Так как все коэффициенты данных уравнений – положительные числа, то неотрицательных корней эти уравнения иметь не могут.

Пусть число x_0 является общим корнем данных уравнений, тогда $x_0^4 + bx_0 + c = 0$ и $x_0^4 + ax_0 + d = 0$ – верные числовые равенства.

Вычтем из одного равенства другое, тогда $(b - a)x_0 + c - d = 0$ – также верное числовое равенство.

Следовательно, $x_0 = \frac{d-c}{b-a} > 0$. Полученное противоречие показывает, что общих корней данные уравнения не имеют.

2 способ. Используем графические соображения. Запишем данные уравнения в виде $x^4 = -bx - c$ и $x^4 = -ax - d$. Уравнения имеют общий корень тогда и только тогда, когда графики линейных функций $y = -bx - c$ и $y = -ax - d$ пересекают график функции $y = x^4$ в одной и той же точке. С одной стороны, так как все коэффициенты в формулах, задающих линейные функции, отрицательны, то эта точка должна лежать во II координатной четверти (см. рис.). С другой стороны, ее абсцисса является решением уравнения $-bx - c = -ax - d$, то есть $x = \frac{d-c}{b-a} > 0$. Получено противоречие.

3 способ.

Для доказательства того, что многочлены x^4+bx+c и x^4+ax+d не имеют общих корней, предположим обратное: пусть r — общий корень этих многочленов. Тогда:

$$\begin{cases} r^4 + br + c = 0 \\ r^4 + ar + d = 0 \end{cases}$$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$(r^4+br+c)-(r^4+ar+d)=0$$

$$br+c-ar-d=0$$

$$(b-a)r+(c-d)=0$$

$$(b-a)r=d-c$$

Так как $0 < a < b < c < d$, то $b-a > 0$ и $d-c > 0$. Следовательно, $(b-a)r=d-c$ означает, что $r=d-cb-a$

Теперь проверим, удовлетворяет ли $r=d-cb-a$ исходным уравнениям. Подставим r в первое уравнение:

$$(d-cb-a)^4+b(d-cb-a)+c=0$$

Упростим это выражение:

$$(d-cb-a)^4+b(d-c)b-a+c=0$$

$$(d-c)^4(b-a)^4+b(d-c)b-a+c=0$$

Умножим все члены уравнения на $(b-a)^4$:

$$(d-c)^4+b(d-c)(b-a)^3+c(b-a)^4=0$$

Теперь подставим r во второе уравнение:

$$(d-cb-a)^4+a(d-cb-a)+d=0$$

Упростим это выражение:

$$(d-cb-a)^4+a(d-c)b-a+d=0$$

$$(d-c)^4(b-a)^4+a(d-c)b-a+d=0$$

Умножим все члены уравнения на $(b-a)^4$:

$$(d-c)^4+a(d-c)(b-a)^3+d(b-a)^4=0$$

Теперь сравним два полученных уравнения:

1. $(d-c)^4+b(d-c)(b-a)^3+c(b-a)^4=0$

2. $(d-c)^4+a(d-c)(b-a)^3+d(b-a)^4=0$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$b(d-c)(b-a)^3+c(b-a)^4-a(d-c)(b-a)^3-d(b-a)^4=0$$

$$(b-a)^3[b(d-c)+c(b-a)-a(d-c)-d(b-a)]=0$$

$$(b-a)^3[bd-bc+bc-ac-ad+ac-d(b-a)]=0$$

$$(b-a)^3[bd-ad-d(b-a)]=0$$

$$(b-a)^3[bd-ad-db+da]=0$$

$$(b-a)^3 \cdot 0 = 0$$

Это уравнение всегда верно, но не дает противоречия, если Γ действительно является общим корнем. Однако, если Γ является общим корнем, то Γ должно удовлетворять обоим исходным уравнениям, что приводит к противоречию, так как $0 < a < b < c < d$ и многочлены $x^4 + bx + c$ и $x^4 + ax + d$ не могут иметь общего корня.

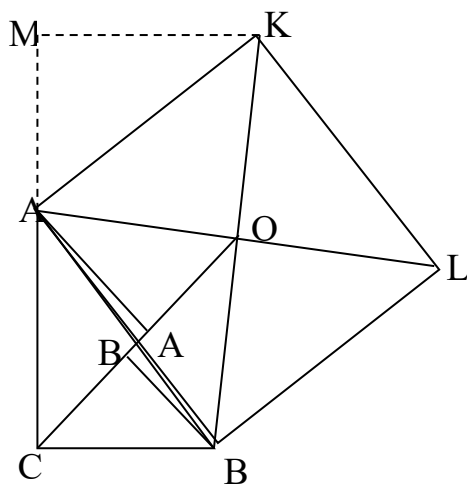
Ответ: Многочлены $x^4 + bx + c$ и $x^4 + ax + d$ не имеют общих корней.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности.
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно ИЛИ имеются погрешности в применении символики и терминологии.
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3	Приведено доказательство, обоснованное некоторыми аргументами, но ясного обоснования доказательство не содержит ИЛИ приведен конкретный пример многочленов и показано, что они не имеют общих корней.
2	Приведены идеи для доказательства или не доведены до конца.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , как на стороне, построен квадрат с центром в точке O (точки O и C лежат по разные стороны от прямой AB). Пусть A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B соответственно на прямую OC . Докажите, что $CB_1 = A_1O$.

Решение.



1) Докажем, что CO – биссектриса угла C , $\triangle ABC$.

2) Выполним дополнительное построение $KM \perp AC$, тогда $\triangle ABC = \triangle KAM$ $AK = AB$ (по условию),

3) $\angle AKM = \angle BAC$ (если совместить $\triangle ABC$ и $\triangle AKM$, так чтобы сторона AB была общей, тогда $\triangle AKM$ и $\triangle BAC$ образуют прямоугольник)

Значит, $KM = AC$.

4) Рассмотрим $\triangle OKM = \triangle OAC$: ($OK = OA$, $KM = AC$, $\angle OKM = \angle OAC$).

1. $OK = OA$ (по свойству диагоналей квадрата)

2. $KM = AC$ (из $\triangle KAM$ и $\triangle ABC$)

3. $\angle OKM = \angle OAC$ ($\angle MKA = \angle CAB$ из $\triangle KMA$ и $\triangle ABC$, $\angle AKO = \angle OAB = 45^\circ$, т.к KB и AL диагонали квадрата)

Значит, $\triangle OKM$ и $\triangle OAC$ (по 1 признаку равенства треугольника), $OM = OC$, $\angle OKM = \angle OAC$, $\angle KOM = \angle AOC$ ($\angle MOK = \angle COA$ из $\triangle MKO = \triangle CAO$, $\angle MOA + \angle AOC = 90^\circ$), $\angle MOS = \angle KOA = 90^\circ$ (т.к. $AO = OC$, значит $\triangle MOS$ равнобедренный, $\angle MOS = 90^\circ$)

Следовательно, $OM = OC$, $\angle OKM = \angle OAC$, $\angle KOM = \angle AOC$, $\angle MOS = \angle KOA = 90^\circ$.

Итак, $\angle ACO = \angle AMO = 45^\circ$, $\angle OCA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, OC биссектриса.

5) Рассмотрим $\triangle AOA_1 = \triangle OBB_1$ (по гипотенузе и острому углу)

1. $AO = BO$ (по свойству диагоналей квадрата)

2. $\angle AOA_1$ и $\angle B_1OB$ в сумме дают 90° ,

Отсюда $A_1O = B_1B$.

6) $\triangle ABC$ – прямоугольный и равнобедренный, поэтому $CB_1 = B_1B$. Итак, $CB_1 = A_1O$.

ч.т.д.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное, строго обоснованное решение. Все шаги логичны, доказаны, не пропущены ключевые моменты.
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности, не влияющие на общую логику и итог (описка, некоторые шаги недостаточно подробно объяснены).
5	Найдена основная идея решения, и большая часть доказательства построена верно, но в одном ключевом месте есть серьезный логический пробел или ошибка.
4	Приведены идеи для решения, но не хватает ключевых связей. Задача сведена к важному промежуточному результату, но дальнейшего продвижения нет. Решение не доведено до конца, но сделан очень важный шаг, который составляет примерно половину всей работы.
3	Верно записаны необходимые соотношения, но решение не продвинуто дальше. Доказано несколько ключевых промежуточных фактов, но они не сведены воедино.
2	Приведены идеи для частного случая, записаны стандартные формулы, нет системного подхода. Доказаны некоторые нетривиальные факты о конфигурации.
1	Представлены начальные размышления, рисунок, но нет значительного продвижения в решении. Верно записана хотя бы одна из формул, связанных с задачей, но они не связаны в логическую цепочку.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

5. Перед занятием группа из десяти человек оставили телефоны в шкафу, и некоторые забыли его выключить. Заглянув в шкаф, Саша сказал, что там 5 телефонов не отключены. На что Вова возразил: «Ты не прав». И добавил: «Там есть три выключенных телефона». Леша же заявил: «Там включено четное число телефонов». Как потом выяснилось, что только одно из четырех утверждений было верным. Сколько телефонов было включено во время занятия?

Решение:

1 способ

Первое и третье утверждения одновременно не могут быть оба неверными, иначе в шкафу было бы меньше пяти включённых телефонов и меньше трёх выключенных, т. е. всего меньше восьми телефонов, что противоречит условию.

Первое и второе утверждения также не могут быть одновременно неверными. Значит, среди утверждений 1 и 3 есть верное, и среди утверждений 1 и 2 есть верное.

Поскольку верное утверждение всего одно, это утверждение 1, а остальные утверждения неверны.

Значит, в шкафу меньше трёх выключенных телефонов (так как утверждение 3 неверно). Тогда включённых телефонов хотя бы восемь, причём их количество нечётно (так как утверждение 4 неверно). Значит, их девять.

2 способ

Первое и третье утверждения одновременно не могут быть оба верными, иначе в шкафу было бы 5 включённых и 7 включенных телефонов, в сумме 12, т. е. всего больше 10 телефонов, что противоречит условию.

Третье и четвертое утверждение одновременно не могут быть оба верными, иначе в шкафу было бы 7 включенных телефонов, это противоречит одному другому.

Первое и четвертое утверждение – аналогично предыдущему рассуждению.

Значит, среди утверждений 1 и 2 есть верное. Поскольку верное утверждение всего одно, это утверждение 1, а остальные утверждения неверны.

Значит, в шкафу больше пяти включенных телефонов и меньше трех выключенных (так как утверждение 3 неверно). Тогда включённых телефонов хотя бы восемь, причём их количество нечётно (так как утверждение 4 неверно). Значит, их девять.

Ответ: 9

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Верное и полное решение, но дан ответ не на тот вопрос («1 выключенный телефон»)
5	Сказано, но не доказано, что верным может быть только утверждение 1, зато потом из этого факта верно выведено, что включённых телефонов 9
4	Объяснено, что верным может быть только утверждение 1, но далее сделана одна ошибка при построении утверждений к одному из утверждений 2, 3, 4, приводящая к неверному ответу (например, где-то «включено» перепутано с

	«выключено» или «чётное» не превращено в «нечётное»)
3	Объяснено, что верным может быть только утверждение 1, но дальнейшие рассуждения неверны или в них сделано не менее двух ошибок.
2	Приведён верный ответ, и без обоснования указано, что при этом верно только утверждение 1, но не объяснено, почему не может быть верно другое утверждение и почему невозможен какой-либо другой ответ
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований.
0	Решение отсутствует.