

Решения задач, 8 класс

8.1. *Покажите, что число*

$$n^3 + 3n^2 + 6n + 8 \quad (n \in \mathbb{N})$$

является составным.

Решение. Разложим данное выражение на множители:

$$n^3 + 3n^2 + 6n + 8 = (n^3 + 8) + (3n^2 + 6n) = (n+2)(n^2 - 2n + 4) + 3n(n+2) = (n+2)(n^2 + n + 4).$$

Поскольку каждый множитель больше единицы, то данное число составное.

□

8.2. *Какое наименьшее значение может принимать НОК четырёх натуральных чисел, сумма которых равна 2030?*

Ответ. 580.

Решение. Пусть $a \leq b \leq c \leq d$ – натуральные числа, сумма которых равна 2030, и $n = \text{НОК}(a, b, c, d)$. Заметим, что все числа равны быть не могут, так как 2030 на 4 не делится. Тогда, $2a \leq n$, $b \leq n$, $c \leq n$, $d \leq n$. Умножим первое неравенство $\frac{1}{2}$ и сложим с остальным. Откуда получаем,

$$a + b + c + d \leq \frac{7}{2}n$$

или

$$n \geq \frac{2}{7}(a + b + c + d) = 580.$$

Пусть

$$a = \frac{2030}{7} = 290, \quad b = c = d = 2a = 580,$$

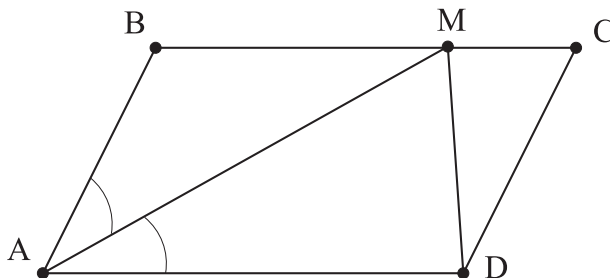
то $a + b + c + d = 2030$, а тогда $n = 580$.

□

8.3. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M , а биссектриса $\angle AMC$ проходит через точку D . Найдите углы параллелограмма, если известно, что $\angle MDC = 45^\circ$.

Ответ. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 120^\circ$.

Решение.



Из условия следует, что

$$\angle BAM = \angle DAM = \alpha.$$

Тогда $\angle AMB = \alpha$, так как $BC \parallel AD$ и $\angle AMC = 180^\circ - \alpha$, поэтому $\angle CMD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Отсюда следует, что $\angle MDA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Значит

$$\angle MDC = \angle CDA - \angle MDA = (180^\circ - 2\alpha) - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha.$$

Таким образом, $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 30^\circ$.

□

8.4. Известно, что квадратный трёхчлен

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a , b , c – целые числа и c – нечётное число имеет целые корни. Может ли $P(2025)$ быть нечётным числом?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни трёхчлена $P(x)$. Тогда по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ или $a \cdot x_1 \cdot x_2 = c$. По условию c – нечётное число, а a , x_1 , x_2 – целые числа. Тогда a , x_1 , x_2 – нечётные числа.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ или $-a \cdot (x_1 + x_2) = b$, а это означает, что b – нечётное число. Тогда

$$P(2025) = a \cdot 2025^2 + b \cdot 2025 + c$$

есть сумма двух нечётных и одного чётного числа, то есть число чётное.

□

8.5. *Можно ли расставить числа*

2011, 2012, 2013, $\dots$, 2030

в вершинах и серединах рёбер куба так, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

Ответ. Нельзя.

Решение. Пусть искомая расстановка существует. Тогда числа, стоящие в соседних вершинах куба, должны быть одной чётности, так как число, равное их полусумме, целое. Откуда следует, что все числа, стоящие в вершинах, одной чётности. Но числа 2011 и 2030 не могут быть полусуммой никаких двух чисел от 2011 до 2030, а поэтому числа 2011 и 2030 должны стоять в вершинах. Получили противоречие.

□