

9 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Вычислите значение выражения $\sqrt{A - B}$, где $A = \underbrace{11 \dots 1}_{2026 \text{ раз}}$, $B = \underbrace{22 \dots 2}_{1013 \text{ раз}}$

Решение 1. Обозначим через X следующее число $X = \underbrace{11 \dots 1}_{1013 \text{ раз}}$. Тогда

$$B = 2X, A = X \cdot 10^{1013} + X, 10^{1013} - 1 = 9X, \\ \text{откуда } A - B = X(1 + 9X) + X - 2X = 9X^2. \text{ Следовательно} \\ \sqrt{A - B} = 3X = \underbrace{33 \dots 3}_{1013 \text{ раз}},$$

Решение 2. Запишем разложение наших чисел по разрядам

$$A = 1 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{2025}, \quad B = 2(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{1012}), \\ \text{тогда}$$

$$\sqrt{A - B} = \sqrt{(1 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{2025}) - 2(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{1012})} = \\ = \sqrt{\frac{10^{2026} - 1}{9} - 2 \frac{10^{1013} - 1}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{10^{2026} - 2 \cdot 10^{1013} + 1} = \frac{1}{3} \sqrt{(10^{1013} - 1)^2} = \\ = \frac{10^{1013} - 1}{3} = \underbrace{33 \dots 3}_{1013 \text{ раз}},$$

Ответ: $\underbrace{33 \dots 3}_{1013 \text{ раз}}$.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов. Арифметическая ошибка либо ошибка в подсчете числа разрядов числа – не более 6 баллов.

2. Для любых двух действительных чисел a и b определена операция $a \diamond b$ следующим образом: $a \diamond b = a + b + k \cdot a \cdot b$, где k — некоторое фиксированное действительное число, не равное нулю. Известно, что:

(1) операция $\diamond$ является ассоциативной, то есть для любых a, b, c выполняется: $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$,

(2) существует такое число e , что для любого a выполняется: $a \diamond e = e \diamond a = a$.

Найдите числа e и k , для которых выполнены свойства (1)-(2)

Решение:

Проверим (1) левая часть равна $(a \diamond b) \diamond c = (a + b + k \cdot a \cdot b) \diamond c = (a + b + k \cdot a \cdot b) + c + k \cdot (a + b + k \cdot a \cdot b) \cdot c = a + b + c + k \cdot a \cdot b + k \cdot a \cdot c + k \cdot b \cdot c + k^2 \cdot a \cdot b \cdot c$,

Правая часть равна $a \diamond (b \diamond c) = a \diamond (b + c + k \cdot b \cdot c) = a + b + c + k \cdot b \cdot c + k \cdot a \cdot (b + c + k \cdot b \cdot c) = a + b + c + k \cdot b \cdot c + k \cdot a \cdot b + k \cdot a \cdot c + k^2 \cdot a \cdot b \cdot c$. Видим, что правая и левая часть совпадают при всех k .

Проверим (2): $a \diamond e = a + e + k \cdot a \cdot e = a$, значит $0 = e + k \cdot a \cdot e = e \cdot (1 + k \cdot a)$, так как это равенство должно выполняться при всех a , в частности при $a = 0$, то получаем что $e = 0$.

Ответ: k любое, $e = 0$.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов. Обосновано получено число $e = 3$ балла. Проверена ассоциативность и сделан вывод про произвольность числа k – 4 балла.

3. Робот находится в точке с координатой 0 на числовой прямой. Он делает последовательность из 6 шагов. Каждый шаг он с равной вероятностью сдвигается либо на +1 (вправо), либо на -1 (влево). Какова вероятность того, что после 6 шагов он окажется в точке с координатой 0, но при этом ни разу за всю прогулку не побывает в точке с координатой -1?

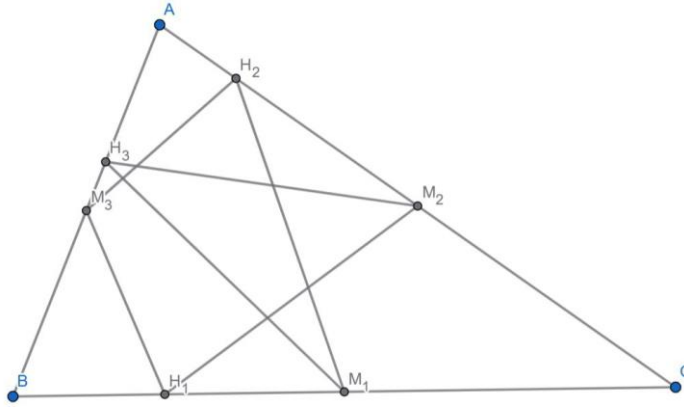
Решение.

Всего у робота 2^6 вариантов путей. Найдем количество вариантов, удовлетворяющих условию. Во-первых, раз робот попал в точку 0, значит он сделал ровно 3 шага влево и 3 шага вправо, а это можно сделать $6 \cdot 5 \cdot 4 : (3 \cdot 2) = 20 = C_6^3$ способами. Теперь найдем число путей, проходящих через точку -1. Заметим, что это количество равно числу путей, заканчивающихся в точке -2, так как позиции «-2» и «0» симметричны относительно «-1». Число путей, заканчивающихся в точке -2 должно состоять из 4 шагов влево и 2 шагов вправо, следовательно, оно равно $6 \cdot 5 : 2 = 15 = C_6^2$. Количество путей, попадающих в точку 0 и не проходящих через -1, равно $20 - 15 = 5$. Тогда искомая вероятность равна $\frac{5}{64}$.

Ответ: $\frac{5}{64}$.

Критерии. Только верный ответ – 1 балл (не суммируется со следующими), найдено общее количество вариантов – 1 балл, обосновано найдено число способов попасть в точку 0, не проходя через -1 – 5 баллов, если задача верно решена методом перебора – баллы не снимать.

4. В треугольнике ABC H_1, H_2, H_3 — основания высот, проведенных соответственно из вершин треугольника A, B, C , а M_1, M_2, M_3 — середины соответствующих сторон BC, AC, AB . Докажите, что длина ломаной $M_1H_2M_3H_1M_2H_3M_1$ **больше** суммы высот треугольника ABC .



Решение. Опустим из точек M_3 и M_2 перпендикуляры на BC . Так как M_3M_2 параллельна BC как средняя линия $\triangle ABC$, то эти перпендикуляры равны половине высоты $\triangle ABC$, проведенной из точки A . Тогда M_3H_1 и M_2H_1 – наклонные к BC .

Следовательно, каждая из них не меньше высоты, а их сумма строго больше высоты $\triangle ABC$, опущенной из точки A . Сумма строго больше, так как только одна из наклонных может совпадать с перпендикуляром в случае прямого угла при одной из вершин. То есть $M_3H_1 + M_2H_1 > AH_1$. Аналогично доказывается, что $M_2H_3 + M_1H_3 > CH_3$ и $M_3H_2 + M_1H_2 > BH_2$, откуда и следует нужное утверждение.

Критерии. В решении присутствует идея о сравнении какой-либо наклонной с перпендикуляром – не менее 2 баллов. Не обоснована строгость неравенства – не более 6 баллов.

5. Доказать, что для решений уравнения

$$x^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}px - \frac{3}{4p^2} = 0$$

выполняется оценка

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$$

Решение. Заметим, что дискриминант уравнения неотрицателен при любых допустимых p . По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}p$, $x_1x_2 = -\frac{3}{4p^2}$. Найдем выражение $x_1^4 + x_2^4 = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 \cdot x_2^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = \left(\frac{2}{3}p^2 + \frac{3}{2p^2}\right)^2 - 2\frac{9}{16p^4} = \frac{4}{9}p^4 + 2 + \frac{9}{4p^4} - \frac{9}{8p^4} = 2 + \frac{4}{9}p^4 + \frac{9}{8p^4} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{9}p^4 + \frac{9}{2\sqrt{2}p^4}\right) \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = 2 + \sqrt{2}$. Здесь использовано неравенство $a + a^{-1} \geq 2$, верное при $a > 0$.

Замечание. Решение можно было провести, опираясь только на идею выделения полного квадрата, в частности, для доказательства того, что $\frac{2\sqrt{2}}{9}p^4 + \frac{9}{2\sqrt{2}p^4} \geq 2$, можно перенести 2 влево и вновь выделить полный квадрат.

Критерии. В решении отсутствует исследование дискриминанта – не более 5 баллов. Неверно выписаны формулы Виета – 0 баллов.

6. Два игрока, Аня и Боря, играют в следующую игру. Перед ними лежит коробок, в котором N спичек. Игроки ходят по очереди, первой ходит Аня.

За один ход игрок может взять из кучи любое положительное число спичек, являющееся делителем текущего количества спичек в куче, кроме самого этого числа. (Например, если в куче 12 спичек, то можно взять 1, 2, 3, 4 или 6 спичек. Кто взял последнюю спичку проигрывает. Для N от 100 до 200 найти такие, при которых Аня выигрывает при правильной игре.

Решение.

Заметим, что у нечетных чисел только нечетные делители. Поэтому после нечетного количества спичек всегда остается четное количество спичек.

Докажем, что выигрывает игрок, перед которым лежит четное количество спичек. Его стратегия: взять 1 спичку, так можно сделать всегда. После такого хода перед следующим игроком нечетное количество спичек. Тогда после его хода остается вновь четное количество спичек либо ноль спичек. Т.е. мы видим, что если перед Аней четное количество спичек, то она выиграет. А если нечетное, то после ее хода перед Борей обязательно будет четное количество и он выиграет.

Далее возможно двоякое понимание условия участниками: если участник посчитал, что когда игроку досталась 1 спичка, он не может ходить, игра на этом останавливается. Если участник посчитал, что когда игроку досталась 1 спичка, он обязан ее взять, то этот игрок и проиграл.

Ответ: при любых четных N от 100 до 200, либо «игра не завершится, остановившись на 1 спичке».

Критерии. Только верный ответ без обоснований – 0 баллов, показано, что после нечетного количества всегда получается четное – не менее 2 баллов, нет стратегии игрока (в частности не показано, что у четных чисел есть нечетный делитель) – не более 4 баллов.

Если участник понял условие в первой трактовке, и объяснил остановку игры полностью – 7 баллов.