

## 9 класс

**9.1.** Среди 32 человек 16 лжецов (они всегда лгут) и 16 рыцарей (они всегда говорят правду). Некоторым из них дали монеты, причём каждому – не более 3 монет. После чего у каждого из людей спросили: «Сколько тебе дали монет?». Было получено 8 ответов «0», 8 ответов «1», 8 ответов «2» и 8 ответов «3». Какое наибольшее количество монет могли суммарно дать всем этим 32 людям?

**Ответ.** 88 монет.

**Решение.** Так как рыцари говорят правду, вместе могут получить не более  $2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 40$  монет. А каждый из лжецов мог получить (по условию) не более 3 монет, то есть вместе лжецы могут получить не более 48 монет. Такая ситуация реализуется, если 8 рыцарям дали по 2 монеты (они дали ответ «2»), 8 рыцарям дали по 3 монеты (они дали ответ «3»), 16 лжецам дали по 3 монеты (они дали 8 ответов «0» и 8 ответов «1»). А всего вместе они получают 88 монет.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

**9.2.** Существуют ли 18 последовательных натуральных чисел таких, что и суммы цифр этих чисел образуют 18 последовательных натуральных чисел (не обязательно записанных по порядку)?

**Ответ.** Существуют.

**Решение.** Подойдут, например, числа от 90 до 107. У чисел от 90 до 99 будут суммы цифр от 9 до 18, а у чисел от 100 до 107 будут суммы цифр от 1 до 8.

**Замечание.** Существуют и другие примеры.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

**9.3.** При решении уравнения  $(x^2 - ax + c)(x^2 - bx + c) = 0$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – некоторые натуральные числа, причём  $a > b$ , Катя обнаружила, что уравнение имеет четыре корня, и эти корни являются последовательными натуральными степенями тройки (например,  $3^3$ ,  $3^4$ ,  $3^5$ ,  $3^6$ ). Найдите все простые числа, которые могут быть делителями числа  $3a - 4b$ .

**Ответ.** 2 и 3.

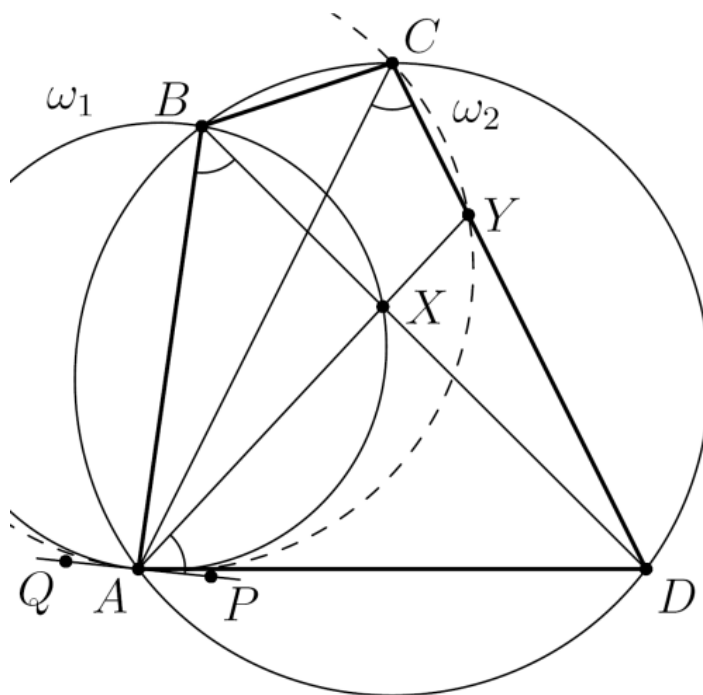
**Решение.** Пусть  $3^k, 3^{k+1}, 3^{k+2}, 3^{k+3}$  – данные корни ( $k$  – натуральное). По теореме Виета для данных квадратных уравнений произведения корней одинаковы (и равны  $c$ ). Значит, корнями одного уравнения являются числа  $3^k, 3^{k+3}$ , другого – числа  $3^{k+1}, 3^{k+2}$ . Сумма корней первого уравнения равна  $a = 3^k + 3^{k+3} = 28 \cdot 3^k$ , а для второго – равна  $b = 3^{k+1} + 3^{k+2} = 12 \cdot 3^k$ . Значит,  $3a - 4b = 12 \cdot 3^{k+1} = 2^2 \cdot 3^{k+2}$ . Так как  $k$  – натуральное число, то делителями разности  $3a - 4b$  будут простые числа 2 и 3 (и никакие другие).

**Комментарий.** Доказано, как корни распределяются по квадратным уравнениям – 2 балла.

Ответ получен рассмотрением примера – 0 баллов.

**9.4.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Прямая, проходящая через точку  $A$ , пересекает отрезки  $BD$  и  $CD$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $ABX$  и  $ACY$ , касаются.

**Решение.** Обозначим через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  описанные окружности треугольников  $ABX$  и  $ACY$  соответственно. Проведём через точку  $A$  прямую  $PQ$ , касающуюся  $\omega_1$  (см. рис). Тогда угол  $PAH$  между касательной  $PQ$  и хордой  $AX$  равен вписанному углу  $ABX$ , то есть углу  $ABD$ . Но вписанные углы  $ABD$  и  $ACD$ , опирающиеся на дугу  $AD$  в описанной окружности четырехугольника  $ABCD$ , равны. Значит, угол между прямой  $PQ$  и хордой  $AY$  в окружности  $\omega_2$  равен углу  $ACD$ , то есть вписанному углу  $ACY$ , опирающемуся на эту хорду. Следовательно, прямая  $PQ$  касается и окружности  $\omega_2$ . Указанные в условии окружности имеют общую касательную, значит, они касаются.



**9.5.** Можно ли выбрать числа  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  так, что произведения  $a_1 a_2 a_3 a_4$ ,  $a_2 a_3 a_4 a_5, \dots, a_8 a_9 a_{10} a_1$ ,  $a_9 a_{10} a_1 a_2$ ,  $a_{10} a_1 a_2 a_3$ , записанные в некотором порядке, образовывали последовательные натуральные числа  $11, 12, 13, \dots, 20$ ?

**Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Рассмотрим 5 произведений  $a_1 a_2 a_3 a_4$ ,  $a_3 a_4 a_5 a_6$ ,  $a_5 a_6 a_7 a_8$ ,  $a_7 a_8 a_9 a_{10}$ ,  $a_9 a_{10} a_1 a_2$ . Если их перемножить, мы получим произведение, в котором каждое из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  участвует дважды, то есть равно  $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10})^2$ . Аналогично, оставшиеся 5 произведений при перемножении дадут  $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10})^2$ . Это означает, что 10 произведений можно разбить на две группы по 5 с одинаковым произведением. Но числа от 11 до 20 нельзя разбить на две группы по 5 чисел с одинаковым произведением, так как, например, среди них есть простое число 17, а никакое другое из них на 17 не делится.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.