

Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2025 г.)

9 класс

1. Упростите выражение $\frac{x^4+6x^2+9-y^4}{2xy-3-(x+y)^2}$ и найдите его значение при $x = 2025$, $y = 2026$.

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$\begin{aligned}\frac{x^4+6x^2+9-y^4}{2xy-3-(x+y)^2} &= \frac{(x^2+3)^2-(y^2)^2}{2xy-3-x^2-y^2-2xy} = \\ &= \frac{(x^2+3-y^2)(x^2+3+y^2)}{-(x^2+3+y^2)} = y^2-x^2-3 = \\ &= (y-x)(y+x)-3;\end{aligned}$$

При $x = 2025$, $y = 2026$ имеем:

$$(2026 - 2025)(2026+2025) - 3 = 4051 - 3 = 4048$$

Ответ: 4048

2. Три круга с радиусами 5 см попарно касаются внешним образом. Вычислите площадь фигуры, которая ограничена этими тремя кругами, каждая точка которой не находится внутри ни одного из кругов.

Решение. Обозначим центры кругов через A , B и C . Поскольку точки касания лежат на прямых, что проходят через центры соответствующих кругов, то площадь искомой фигуры равна площади треугольника ABC минус площади секторов образованных углами ABC , CAB и BCA . Треугольник ABC является равносторонним со стороной 10 см, а каждый из трех секторов есть сектор круга радиуса 5 см и центральным углом, равным

60° . $S_{ABC} = 25\sqrt{3} \text{ см}^2$. Площадь каждого из секторов равна одной шестой площади круга и, следовательно, равна $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 25 \text{ см}^2$. Тогда площадь данной фигуры равна $25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{2} \text{ см}^2$.

Ответ: $25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{2} \text{ см}^2$.

3. Известно, что $0 \leq a_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Найдите наибольшее значение выражения $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_1a_2 - a_2a_3 - a_3a_4 - a_4a_1$.

Решение. Данное выражение можно считать линейной функцией от одной из переменных, если три остальные переменные зафиксировать. Например, зафиксируем значения

переменных a_2 , a_3 и a_4 и рассмотрим функцию $f(a_1) = (1 - a_2 - a_4)a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_2a_3 - a_3a_4$, где $a_1 \in [0; 1]$. В силу монотонности, ее наибольшее значение достигается на одном из концов отрезка $[0; 1]$. Аналогичная ситуация возникнет и для заданных таким же образом линейных функций от переменных a_2 , a_3 и a_4 . Следовательно, наибольшее значение исходного выражения может достигаться только в том случае, когда переменные a_1 , a_2 , a_3 и a_4 принимают одно из двух значений: 0 или 1. Учитывая симметричность данного выражения, достаточно теперь проверить следующие случаи:

- 1) если $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ или $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$, то значение выражения равно 0;
- 2) если $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 1$ или $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = 0$, то значение выражения равно 1;
- 3) если $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a_4 = 1$ или $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 0$, то значение выражения равно 1;
- 4) если $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = a_4 = 1$ или $a_1 = a_3 = 1$, $a_2 = a_4 = 0$, то значение выражения равно 2.

Таким образом, наибольшее значение данного выражения равно 2.

Ответ: 2.

4. В кучке лежат 2025 различных камней. Докажите, что из этой кучки можно выбрать нечетное число камней столькими же способами, как и четное число камней.

Доказательство. Если выбраны какие-то k предметов с нечетным k , то число оставшихся предметов будет $(2025 - k)$ – четное число. Каждое разбиение всех 2025 камней на два подмножества с нечетным количеством в первом и четным во втором устанавливает взаимно однозначное соответствие между нечетными выборками и четными. Следовательно, число выборок обоих типов одно и то же. Что и требовалось доказать.

5. Из 2025 цифр составили несколько чисел. Потом сложили написанные числа и из полученной суммы вычли сумму сумм их цифр. Разность разбили на цифры, и снова повторили указанную выше операцию. Операцию выполняли до тех пор, пока в итоге осталась только одна цифра, отличная от нуля. Какую цифру получили в итоге?

Решение. Так как разность числа и суммы цифр числа делится на 9, то при первом же прогоне операции мы получаем число, кратное 9. Причём, если взять сумму нескольких чисел и из неё вычесть сумму цифр этих чисел, то результат также будет кратен 9. Продолжая вычисления, мы будем получать числа, кратные 9, но уменьшающиеся по абсолютной величине. В итоге, первое однозначное число, отличное от нуля, которое мы получим, должно делиться на 9, а это только 9.

Ответ: 9.