

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2025-2026 ГГ.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП.
9-Й КЛАСС**

Задание 9. 1. На новогоднем вечере в классе каждый мальчик подарил каждой девочке по 1 конфете «Белочка», а каждая девочка каждому мальчику – по 1 конфете «Коровка». Затем каждый мальчик съел по 2 из подаренных ему конфеты, а каждая девочка – по 3 конфеты из тех, которые ей подарили. Вышло так, что детьми была съедена четверть всех подаренных конфет. Какое наибольшее количество детей могло учиться в этом классе?

Решение. Пусть в классе мальчиков x , а девочек y , тогда имеем уравнение; $2xy=4(3y+2x)$, из которого получим $xy-6y-4x=0$ или $(x-6)(y-4)=24$. Далее достаточно пересмотреть все делители числа 24 и получить всевозможные варианты значений $(x+y)$, среди которых максимальное будет в двух случаях: $24=1*24$ или $24=24*1$. Для каждого из них $x+y=7+28=30+5=35$. **Ответ: 35.**

Задание 9.2. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120^\circ$. Биссектриса этого угла пересекает сторону AC в точке M , а биссектриса угла, смежного с углом $\angle BCA$, пересекает прямую AB в точке P . Отрезок MP пересекает сторону BC в точке K . Докажите, что $\angle AKM = \angle KPC$.

Решение. Докажем, что AK – биссектриса $\angle BAM$. Точка P равноудалена от прямых BC и AC , а также от прямых BM и BC , поскольку

$\angle ABM = \angle MBC = \angle CBP = 60^\circ$. Поэтому точка P – равноудалена от прямых BM и MC , значит точка P лежит на биссектрисе $\angle BMC$. Поэтому точка K равноудалена от прямых AC и BM , а также от прямых BM и BP , поэтому AK – биссектриса $\angle BAC$. Обозначим $\angle BAK = \angle KAC = \alpha$.

$$\angle KMC = 0,5\angle BMC = 0,5(60^\circ + 2\alpha) = 30^\circ + \alpha.$$

$$\angle BSA = 60^\circ - 2\alpha.$$

$$\angle BCP = 0,5(180^\circ - 60^\circ + 2\alpha) = 60^\circ + \alpha.$$

$$\angle ACP = 60^\circ - 2\alpha + 60^\circ + \alpha = 120^\circ - \alpha.$$

$$\angle MPC = 180^\circ - (120^\circ - \alpha + 30^\circ + \alpha) = 30^\circ.$$

$$\angle AKM = \angle KMC - \alpha =$$

$$= 30^0 + \alpha - \alpha = 30^0 = \angle MPC, \text{ что и т.д.}$$

Задание 9.3. На координатной плоскости берут 5 точек с целыми координатами. Докажите, что середина хотя бы одного из отрезков, получаемых из данных точек, имеет целые координаты.

Решение. Если $C(c_1; c_2)$ - середина отрезка AB , где $A(a_1; a_2), B(b_1; b_2)$, то $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$, причём c_i будут целыми, только если соответственные координаты концов отрезка будут одинаковой чётности. Обозначим Н – нечётная координата, Ч – чётная координата. Существует 4 вида координат точек: (Н;Н), (Н;Ч), (Ч;Н), (Ч;Ч). Координаты пятой точки совпадут с одной из четырёх по признаку Дирихле, следовательно координаты середины будут целыми, что и т.д.

Задание 9.4. Найдите значение выражения $a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3)$ где a и b являются корнями уравнения $x^2 - x + c = 0$.

Решение. Так как a и b – корни уравнения, то $a+b=1, ab=c$. Преобразуем данное выражение: $(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2(a+b) =$
$$= (a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) + 3ab((a+b)^2 - 2ab) + 6(ab)^2 =$$

$$= 1 - 3c + 3c - 6c^2 + 6c^2 = 1. \text{ Ответ: } 1.$$

Задание 9.5. Можно ли расставить по кругу 2025 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

Решение. Пользуемся методом от противного. Допустим, что нашлись такие числа $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$, которые можно расставить требуемым образом. Не нарушая общности рассуждений, предположим $a_1 > a_2 > a_3$, $k(a_i)$ -количество простых делителей числа a_i . Тогда $a_1 = a_2 p$, где p - простое число, $a_2 = a_3 q$, где q - простое число, $k(a_1) - k(a_2) = 1, k(a_2) - k(a_3) = 1$. Значит $k(a_1)$ и $k(a_3)$ одинаковой чётности. Следовательно, $k(a_1)$ и $k(a_{2025})$ одинаковой чётности, но они соседние числа. Получено противоречие. Ответ: нет

Задание 9.1. Критерии оценивания:

7	Правильное обоснованное решение. Найдено нужное значение, подтверждённое конкретными значениями переменных.
6	При правильном решении допущена одна арифметическая ошибка.
4	Обосновано получено нужное значение, без подтверждающих значений переменных.
3	Обоснованно составлено уравнение
1	Дан правильный ответ без обоснований.
0	Решение отсутствует или неверное

Задание 9.2. Критерии оценивания:

7	Правильное обоснованное решение.
6	При правильном ходе решения допущена одна арифметическая ошибка.
4	Доказано, что АК – биссектриса.
1	Неполное обоснование, дающее частное решение.
0	Решение отсутствует или неверное

Задание 9.3. Критерии оценивания:

7	Правильное обоснованное решение.
2	Только рассуждения о том, какими могут быть координаты середины отрезка
1	Неполное обоснование, дающее частное решение.
0	Решение отсутствует или неверное

Задание 9.4. Критерии оценивания:

7	Правильное обоснованное решение.
6	При правильном ходе решения допущена одна арифметическая ошибка.
2	При подстановке корней уравнения получено не упрощённое выражение
1	Дан правильный ответ без обоснований.
0	Решение отсутствует или неверное

Задание 9.5. Критерии оценивания:

7	Правильное обоснованное решение.
3	Доказано, что количество простых делителей соседних чисел отличается на 1
0	Решение отсутствует или неверное