

9 класс

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

9.1. На распродаже жуков одного жука продавали за 1 евро. При этом за каждые десять купленных жуков ещё одного давали бесплатно, а за каждые сто купленных жуков давали бесплатно ещё пять. Аня потратила на покупку жуков все свои деньги и в результате у неё оказалось 160 жуков. Сколько денег было у Ани?

Ответ: 141 евро.

1-е решение. Если у Ани было $100x + 10y + z$ евро ($y, z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$), то она купила ровно $p = 100x + 10y + z + y + 15x = 160$ жуков. Так как при $x = 0$ значение p не превосходит 108, а при $x = 2$ значение p не меньше 230, то $x = 1$, $11y + z = 45$. Так как при $y \geq 5$ значение $11y + z$ не меньше 55, а при $y \leq 3$ значение $11y + z$ не больше 42, то $y = 4$, $z = 1$.

2-е решение. За 100 купленных жуков добавили 15 бесплатных. Еще за 40 оплаченных жуков добавили 4 бесплатных. Нужно купить еще $160 - 100 - 15 - 4 = 1$ жука. Всего потрачено $100 + 40 + 1 = 141$ евро.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.

Составлено уравнение $100x + 10y + z + y + 15x = 160$ – 2 балла.

9.2. Докажите, что если $x + 1 > 0$, $y + 1 > 0$ и $x + y = 1$, то справедливо неравенство

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq \frac{2}{3}$$

При каких x и y выполняется равенство?

Решение. С учётом положительности знаменателей и условия $x + y = 1$ приведём исходное неравенство к виду $3(x^2 + y^2 + 1) \geq 2(xy + 2)$. Так как $y = 1 - x$, то $3(x^2 + (1 - x)^2 + 1) \geq 2(x(1 - x) + 2)$, $8x^2 - 8x + 2 = 2(2x - 1)^2 \geq 0$. Последнее неравенство верно при всех x . При этом равенство достигается при $x = 1/2 = y$.

Комментарии. Верное обоснованное решение при отсутствии указания «при каких x и y выполняется равенство» – 6 баллов.

9.3. Докажите, что если четыре простых числа p, q, r, s удовлетворяют неравенству

$$5 < p < q < r < s < p+10,$$

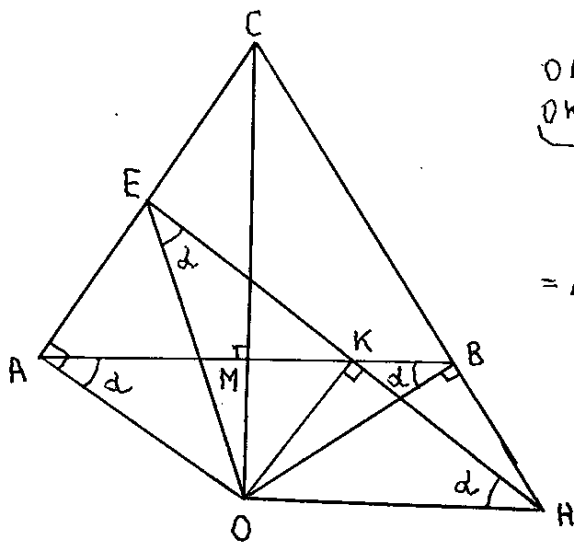
то их сумма делится на 60.

Решение. Между нечётными числами p и $p+10$ расположены четыре нечётных числа: $p+2, p+4, p+6, p+8$. Так как среди любых трёх подряд идущих нечётных чисел есть число, кратное трём, а четыре из пяти чисел $p, p+2, p+4, p+6, p+8$ простые, то число $p+4$ делится на 3 и $p+2 = q, p+6 = r, p+8 = s$. Кроме того, среди пяти нечётных чисел $p, p+2, p+4, p+6, p+8$ ровно одно делится на 5, поэтому $p+4$ делится на 5 и, следовательно, делится на 15. А тогда сумма $p + q + r + s = 4p + 16 = 4(p + 4)$ делится на 60.

Комментарии. Доказано, что $p+4$ делится на 3 – 2 балла.

Доказано, что $p+4$ делится на 5 – 2 балла.

9.4. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AB отмечены точки M и K , причём точка M – середина основания AB . Перпендикуляр к прямой AC в точке A пересекает прямую CM в точке O . Перпендикуляр к прямой OK в точке K пересекает прямые AC и BC в точках E и H соответственно. Докажите, что точка K является серединой отрезка EH .



$$\begin{aligned} & \text{ОАЕК - вписан} \\ & \text{ОКВН - вписан} \\ & \downarrow \\ & \angle OЕК = \angle OAK = \\ & = \angle OВК = \angle OНК \\ & \downarrow \\ & \boxed{ЕК = НК} \end{aligned}$$

Решение. ОАЕК вписан в окружность с диаметром ОЕ, а ОКВН вписан в окружность с диаметром ОН. Поэтому $\angle OЕК = \angle OAK = \angle OВК = \angle OНК$. Поэтому треугольник ОЕН равнобедренный и высота ОК является и медианой.

Комментарии. Замечено, что ОАЕК и ОКВН - вписаны – 2 балла.

9.5. Таблица размера 4×4 разделена на 16 единичных клеток белого цвета. Две клетки считаются *соседними*, если они имеют общую сторону. Ход состоит в выборе клетки и перекрашивании самой клетки и всех соседних клеток с белого на чёрный или с чёрного на белый. Ровно через n ходов все 16 белых клеток стали чёрными. Найдите все возможные значения n .

Ответ: $n = 4, 6, 8, 10, \dots$

Решение. Отметим клетки на пересечении первого столбца и третьей строки, второго столбца и первой строки, третьего столбца и четвёртой строки, четвёртого столбца и второй строки. Перекрасим по очереди эти 4 клетки, а вместе с ними перекрасятся по 3 клетки. Каждая клетка перекрашена один раз. Значит, одно из значений n равно 4. Перекрашивая еще два раза одну из этих клеток и 3 соседние с ней, получим $n = 6$. Повторяя такие перекрашивания, можно получить любое чётное число ходов. А так как за один ход можно перекрасить ровно одну из четырёх отмеченных клеток, то за нечётное количество ходов нельзя перекрасить эти 4 клетки, а значит и 16 клеток тоже нельзя перекрасить.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.