

9 класс

1. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора натуральных чисел от 1 до 2025, чтобы сумма любых двух выбранных делилась на 8?

Решение

Чтобы сумма любых двух чисел делилась на данное число, необходимо, чтобы сумма их остатков делилась на это число. Сумма остатков любых двух чисел будет делиться на 8, если каждое из этих чисел делилось на 8 или если остаток от деления равен 4.

Найдем количество таких чисел. $2025:8=253$ (ост.4).

Тогда количество чисел, делящихся на 8, будет 253, а чисел, дающих при делении на 8 остаток 4, будет $253+1=254$.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верное и обоснованное решение (прямой перебор считать обоснованным решением) – 7 баллов.

Рассмотрены только числа, делящиеся на 8 – 2 балла.

Допущена вычислительная ошибка или неточность в рассуждениях – от 4 до 6 баллов.

2. Разложить многочлен на множители $4x^4 - 1 + 12x^3 + 9x^2$.

Решение

$$\begin{aligned} 4x^4 - 1 + 12x^3 + 9x^2 &= (4x^4 + 12x^3 + 9x^2) - 1 = (2x^2 + 3x)^2 - 1 \\ &= (2x^2 + 3x - 1)(2x^2 + 3x + 1) \\ &= 4 \left(x + \frac{3 + \sqrt{15}}{4} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{15}}{4} \right) (x + 1)(x + 0,5) \end{aligned}$$

Критерии

Верное и обоснованное решение – 7 баллов.

Разложение не выполнено до конца – от 3 до 6 баллов в зависимости от продвижения в решении.

Допущена арифметическая ошибка – снять 1 балл.

Допущена ошибка в использовании формулы – не более 3 баллов за всю задачу.

3. 30 школьников участвовали в круговом шахматном турнире (каждый играет партию с каждым другим участником). Выигравший партию получает 1 очко, а проигравший – 0 очков, в случае ничьей каждый получает по 0,5 очков. Учащимся, которые набрали не менее 60% от максимально возможного числа очков, присваивался разряд. Какому наибольшему количеству участников мог быть присвоен разряд?

Решение

Оценка. Посчитаем количество партий: $30 \times 29 : 2 = 435$, значит, максимальное количество очков, которое может быть разыграно, составляет 435.

Максимальное количество очков, которое может получить один участник турнира, – 29. $0,6 \times 29 = 17,4$. Значит, для получения разряда нужно набрать минимум 17,5 очков. $[435:17,5] = 24$, т.е. не более 24 человек смогут набрать не менее 60% от максимального числа очков.

Пример. Покажем, что 24 участника могут набрать по 17,5 очков. Для этого 24 человека должны сыграть между собой в ничью и набрать по $23 \times 0,5 = 11,5$ очков и выиграть у остальных шестерых, заработав по 6 очков. Таким образом, общее количество очков, набранное этими участниками составляет 17,5.

Критерии

Найдено только количество партий и общее число очков – 1 балл.

В дополнение к предыдущему пункту найдено максимальное количество очков, которые может получить один участник, и количество баллов для получения разряда – 2 балла.

В дополнение к предыдущим двум пунктам выполнена оценка $[435:17,5] = 24$ – 4 балла.

При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка, не влияющая на ход рассуждений, в результате чего получен неверный ответ – 6 баллов.

Оценка + пример – 7 баллов.

4. 10 грибников собрали вместе 130 грибов, причем каждый грибник сколько-то грибов нашел и каждый собрал отличное от любого другого грибника количество грибов. Известно, что любые 5 грибников собрали не меньше 50 грибов. Какое наибольшее количество грибов мог собрать один грибник?

Решение

Упорядочим грибников по возрастанию собранных ими грибов.

Тогда наименьшее количество грибов, собранных пятым грибником равно 12. Иначе, первые пять грибников собрали не больше, чем $11+10+9+8+7=45$ грибов.

Тогда наименьшее количество грибов, собранных следующими грибниками 13, 14, 15 и 16.

Тогда наибольшее количество грибов 10-го грибника $130-50-13-14-15-16=22$.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верный ответ и только приведен верный пример – 0 баллов.

Верное решение, но отсутствует обоснование «наименьшее количество грибов, собранных пятым грибником равно 12» и этот факт используется в решении – 5 баллов.

Верный ответ и выполнен полный перебор (при решении методом перебора) – 7 баллов.

При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка, не влияющая на ход рассуждений, в результате чего получен неверный ответ – 6 баллов.

Верное, полное и обоснованное решение – 7 баллов.

Указание: проведите диаметр AL .

$\angle ACL = \angle ABL = 90^\circ$ (опираются на диаметр AL).

$$CH \perp AB \Rightarrow CH \parallel LB.$$

Рассмотрим треугольник ALH : OK – средняя

Критерии

Обосновано $\angle ACL = \angle ABL = 90^\circ$ без дальнейшего продвижения— 1 балл.

Верное, полное и обоснованное решение – 7 баллов.