

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2025-2026 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе**

Теоретический тур

9 класс

Максимальное количество баллов - 35.

Время выполнения - 235 минут.

Краткая инструкция.

Все олимпиадные задания выполняются письменно. Желательно пользоваться ручками с чернилами синего цвета. Чертежи производить желательно ручкой (сначала возможно использовать карандаш, но потом чертеж обвести ручкой).

Разрешается использовать чертёжные принадлежности (линейка, циркуль, ластик) для выполнения заданий.

Участник олимпиады на выданном бланке ответов записывает подробные решения задач, указывая соответствующий номер задачи. Переписывать формулировки заданий не обязательно. Предварительные вычисления можно делать на выданных дополнительных листах (черновиках).

При выполнении заданий не допускается использование справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

После завершения работы все бумаги должны быть сданы организаторам олимпиады, включая черновики.

Решения задач, критерии оценивания

1. Однажды, осерчав на Кощея Бессмертного, Баба Яга превратила все монеты в одном из восьми его сундуков в фальшивые (они стали чуточку легче). Узнав про то, царь Кощей решил определить, какой из сундуков наполнен фальшивыми монетами? Он взял по одной монете из каждого сундука, достал чашечные весы (они показывают только «больше», «меньше»

или «равно») и собрался за минимальное число взвешиваний найти фальшивую монету. Царь Кощей очень умный. За какое же наименьшее число взвешиваний он гарантированно найдёт эту фальшивую монету? И главное — как?

Ответ: за 2 взвешивания.

Решение:

Для первого взвешивания Кощей положил на чаши весов по три монеты, а две пока отложил в сторонку. Он понимает, что, если на весах будет равновесие, то фальшивую монету следует искать среди двух отложенных, и, положив их на чаши весов (по одной на каждую), он найдёт её за одно взвешивание. Если же весы покажут неравновесие, то это будет означать, что фальшивая монета находится в более лёгкой кучке. Тогда во втором взвешивании он сравнит веса любых двух монет из этой кучки, а третью опять отложит в сторонку. Если будет равновесие, то фальшивая монета и есть та отложенная монета; если неравновесие, то фальшивая — это та, что легче.

Рекомендации к оцениванию решения.

Если оба «взвешивания» проведены учеником безукоризненно — 7 баллов. Если из-за ошибки ученика два «взвешивания» не дают гарантированного результата — максимум 4 балла. Если в первом «взвешивании» ученик «положил» на чаши весов по три монеты, но дальше не продвинулся — 1 балл. Просто ответ «за 2 взвешивания» без объяснений — 0 баллов.

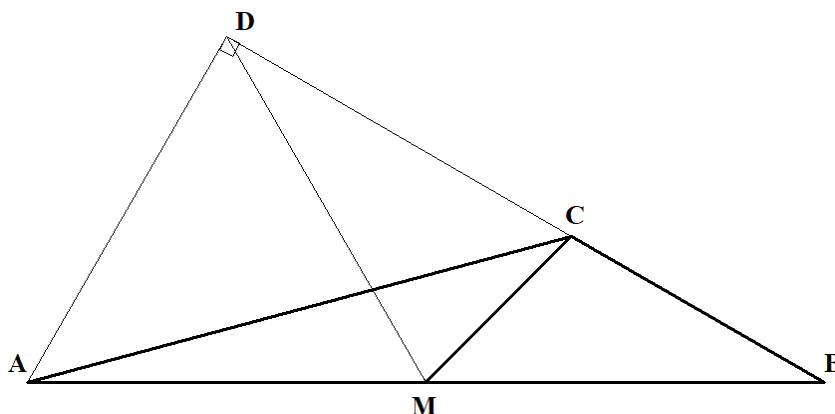
2. Угол между самой короткой в треугольнике медианой и самым длинным основанием составляет 45° . Чему равны все углы треугольника, если угол между этой же медианой и другой стороной треугольника равен 105° ?

Ответ: 15° , 30° , 135° .

Решение:

Построим чертёж, в котором обозначим вершины треугольника так, чтобы углов в 45° был $\angle CMB$.

$\angle CMB = 45^\circ \Rightarrow \angle AMC$
 $= 135^\circ \Rightarrow \triangle AMC$ —
тупоугольный $\Rightarrow$
 $\angle CAM$ и $\angle ACM$ —
острые углы $\Rightarrow$ тупой
угол в 105° между
стороной и медианой —



$$\angle MCB \Rightarrow \text{в } \triangle CBM \angle CBM = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ.$$

Опустим высоту из вершины А на продолжение стороны ВС и обозначим точку их пересечения буквой D. Тогда $\triangle ADB$ — прямоугольный треугольник, в котором $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle DBA = 30^\circ$ и $\angle DAB = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы. То есть $AD = AM \Rightarrow \triangle ADM$ — равнобедренный, а так как $\angle DAB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ADM$ — равносторонний $\Rightarrow DM = AD$ и $\angle ADM = \angle DMA = 60^\circ \Rightarrow \angle MDC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, а $\angle DMC = \angle AMB - \angle AMD - \angle CMB = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ \Rightarrow$ в треугольнике DMC $\angle DCM = 180^\circ - \angle CDM - \angle DMC = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ \Rightarrow \triangle DMC$ — равнобедренный $\Rightarrow DM = DC = AD \Rightarrow \triangle ADC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle DAC = \angle DCA = (180^\circ - 90^\circ) / 2 = 45^\circ \Rightarrow \angle CAB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ и $\angle ACB = \angle DCB - \angle DCA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Рекомендации к оцениванию решения.

Обоснованно найден $\angle CBM = 30^\circ$ — 1 балл. Опущена высота AD и установлено, что $AD = AM$ — 2 балла. Остальное по критериям.

3. Продав 100 билетов на посещение Пятигорского Провала (членам профсоюза — по 10 копеек; не членам профсоюза — по 30 коп.; детям — по 5 коп.), Остап Бендер выручил 15 рублей. Сколько и каких билетов было продано, если число билетов для нечленов профсоюза не является простым, а количество всех остальных билетов кратно семи?

Ответ: 20 детских билетов, 50 билетов для членов профсоюза, 30 билетов для нечленов профсоюза.

Решение:

Пусть:

x — количество детских билетов, y — количество билетов для членов профсоюза, z — количество билетов для нечленов профсоюза, где x, y, z — натуральные числа.

Тогда все четыре условия задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x + y + z = 100, & (1) \\ 5x + 10y + 30z = 1500, & (2) \\ z \notin \mathbb{P}, & (3) \\ (x + y) : 7. & (4) \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим z и подставим во второе:

$$5x + 10y + 30(100 - x - y) = 1500$$

$$-25x - 20y + 3000 = 1500$$

$$5x + 4y = 300 \quad (5)$$

Мы получили диофантово уравнение. Чтобы его решить, проанализируем, какими могут быть значения x, y и z .

Из (5) следует $5x = 300 - 4y = 4 \cdot (75 - y)$. Заметим, что правая часть делится на 4. Следовательно, и x должно делиться на 4.

Так же из (5) получаем $4y = 300 - 5x = 5 \cdot (60 - x)$. Теперь правая часть очевидно делится на 5. Следовательно, и y делится на 5.

Из (4) и (1) следует, что z при делении на 7 даёт остаток 2: $z = 100 - (x + y) \equiv 100 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$. (6)

Проведём оценку допустимых значений. Из (5) получаем:

$$5x + 4y = x + 4 \cdot (x + y) = 300 \quad ;$$

$$x = 300 - 4(x + y) = 400 - 4(x + y) - 100 = 4(100 - x - y) - 100 \quad ;$$

Учитывая (1), упрощаем дальше:

$$x = 4z - 100 \quad ;$$

$$x = 4(z - 25). \quad (7)$$

Из (7) следует, что $z > 25$.

Проводя аналогичные выкладки, из (5), учитывая (1), получаем:

$$5x + 4y = 5 \cdot (x + y) - y = 300 \quad ;$$

$$-y = 300 - 5(x + y) = 500 - 5(x + y) - 200 = 5z - 200 \quad ;$$

$$y = 200 - 5z \quad ;$$

$$y = 5(40 - z). \quad (8)$$

Из (8) следует, что $z < 40$.

Теперь даём оценку для z : $25 < z < 40$.

В установленном диапазоне есть только два натуральных числа, имеющих при делении на 7 остаток 2. Это 30 и 37. При этом число 37 не подходит по условию, следовательно

$$z = 30.$$

С помощью (7) и (8) получаем окончательный результат:

$$x = 20, y = 50, z = 30.$$

Рекомендации к оцениванию решения.

Дан только ответ без выкладок — 0 баллов.

Записаны формулы (1) и (2) — 1 балл.

Получено диофантово уравнение (5) — 3 балла.

Сделаны выводы о делимости x и y и найдено решение, например, с помощью заполненной таблицы с вариантами для x, y и z (то есть без оценки) — 5 баллов.

Найдено решение с выкладками и оценкой — 7 баллов.

4. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, у которого $p + q = 2025$, являются целыми числами. Найдите, какими могут быть эти корни, если известно, что 1013 – простое число.

Ответ: $\{2; 2027\}, \{0; -2025\}, \{3; 1014\}, \{-1; -1012\}$

Решение:

Пусть u и v – корни уравнения. По теореме Виета $u + v = -p$, $u \cdot v = q$. Тогда

$$-u - v + uv = 2025;$$

$$(u - 1) \cdot (v - 1) = 2026;$$

$$2026 = 1 \cdot 2026; \quad 2026 = (-1) \cdot (-2026); \quad 2026 = 2 \cdot 1013; \quad 2026 = (-2) \cdot (-1013).$$

Получаем возможные значения для корней квадратного трехчлена:

$$\{2; 2027\}, \{0; -2025\}, \{3; 1014\}, \{-1; -1012\}$$

Рекомендации к оцениванию решения.

Один из возможных ответов получен методом подбора – 1 балл

Задача сведена к решению уравнения в целых числах, но найдены не все его решения – 3 балла.

5. На доске записаны числа $\frac{10}{100}, \frac{10}{99}, \frac{10}{98}, \dots, \frac{10}{1}$. Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них одно $\frac{ab}{a+b}$. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется всего одно число. Какое значение принимает это число?

Ответ: $\frac{1}{505}$

Решение:

Подпишем под каждым числом обратное к нему и то же самое будем делать с преобразованными числами. Если $a = \frac{u}{m}, b = \frac{u}{n}$, то

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{\frac{u}{m} \cdot \frac{u}{n}}{\frac{u}{m} + \frac{u}{n}} = \frac{\frac{u^2}{mn}}{\frac{un+um}{mn}} = \frac{u^2}{mn} \cdot \frac{mn}{um+un} = \frac{u^2}{u(m+n)} = \frac{u}{m+n}.$$

То есть, стирая с доски числа $\frac{u}{m}$ и $\frac{u}{n}$, и записывая новое число $\frac{u}{m+n}$, мы заменяем два прежних числа на число с тем же числителем, но со знаменателем, равным сумме двух прежних знаменателей. Тогда после замены всех чисел мы получим число с тем же числителем, но со знаменателем, равным сумме всех знаменателей:

$$\frac{10}{100+99+98+\dots+1} = \frac{10}{1+2+\dots+100} = \frac{10}{5050} = \frac{1}{505}.$$

Рекомендации к оцениванию решения.

Если рассмотрен только порядок применения действий, причём без обоснования — 0 баллов. Если доказан ответ для частного случая (например, с помощью метода математической индукции) — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.