

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Муниципальный этап)

9 класс

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Необходимо учитывать следующее:

- 1) По всем заданиям начисление баллов производится целым, а не дробным числом;
- 2) Любое правильное решение оценивается в 7 баллов;
- 3) Общий результат по итогам муниципального этапа оценивается путем сложения баллов, полученных участником за каждую задачу;
- 4) Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее **правильности и полноты**;
- 5) Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
- 6) Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

9.1. Все трехзначные числа записаны в ряд: 100 101 102 ... 998 999. Сколько раз в этом ряду после двойки идет нуль?

Ответ: 19.

Решение: Так как трехзначное число не может начинаться с нуля, то двойка, после которой идет нуль, не может стоять в разряде единиц одного из трехзначных чисел ряда. Пусть двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа. Тогда идущий за ней нуль стоит в разряде единиц того же числа, т.е. это число оканчивается на 20. Таких чисел 9: 120, 220, ..., 920. Наконец, если двойка, после которой идет нуль, стоит в разряде сотен, то соответствующее

трехзначное число начинается на 20. Таких чисел 10: 200, 201, ..., 209. Таким образом, всего после двойки нуль будет встречаться 19 раз.

Комментарий. Не доказано, что двойка не может стоять в разряде единиц – не более 5 баллов. Дан только ответ – 1 балл.

9.2. Дан треугольник ABC , точка M — середина стороны BC . Пусть ℓ — биссектриса внешнего угла A треугольника ABC . Прямая, проходящая через M и параллельная ℓ , пересекает сторону AB в точке K .

Найдите длину отрезка AK , если $AB = 23$ и $AC = 8$.

Ответ: 15,5.

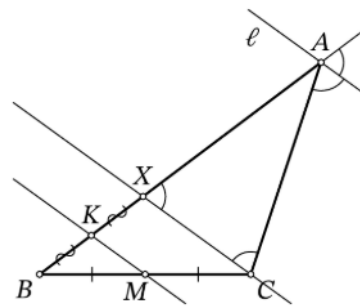
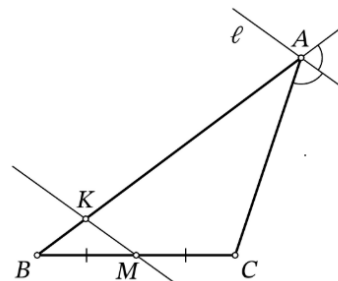
Решение:

Проведём через точку C прямую ℓ_1 параллельно прямой ℓ . Пусть X — точка пересечения прямой ℓ_1 и AB .

Заметим, что $\angle AXC = \angle ACX$, так как оба этих угла равны половине внешнего угла A , поэтому $AX = AC = 8$.

В треугольнике BCX отрезок MK является средней линией, поэтому

$$AK = AX + XK = 8 + BX / 2 = 8 + (AB - AX) / 2 = 8 + (23 - 8) / 2 = 15,5.$$



9.3. Квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$, где p и q — натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

Ответ: Наименьшая сумма корней равна 9 у квадратного трёхчлена $x^2 - 9x + 20$.

Решение:

По формуле корней квадратного уравнения имеем: $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Следовательно, $x_2 - x_1 = \sqrt{p^2 - 4q}$. После уменьшения q на 30% разность корней станет равна $\sqrt{p^2 - 4 \cdot \frac{7}{10}q}$. Следовательно, при условии,

что $p^2 - 4q \geq 0$, получаем $5\sqrt{p^2 - 4q} = \sqrt{p^2 - \frac{14}{5}q}$.

$$p^2 = \frac{81}{20}q > 4q.$$

$$4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q.$$

По теореме Виета сумма корней квадратного трёхчлена $x^2 - px + q$ равна p . Наименьшее натуральное p , удовлетворяющее равенству $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$, это $3^2 = 9$, так как p^2 должно делиться на 3^4 . Тогда $q = 20$.

9.4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители острова дружат друг с другом (дружба взаимна). Утром каждый житель острова заявил, что дружит с нечётным числом рыцарей. Вечером каждый житель острова заявил, что дружит с чётным числом лжецов. Может ли количество жителей этого острова быть равно 2025?

Ответ: не может.

Решение

Воспользуемся известным вспомогательным утверждением (эквивалентным лемме о рукопожатиях): в любой компании количество людей, которые дружат с нечётным числом остальных, чётно.

Из утренних заявлений следует, что каждый рыцарь дружит с нечётным числом рыцарей, а каждый лжец, в свою очередь, дружит с чётным числом рыцарей. Из вечерних заявлений следует, что каждый лжец дружит с нечётным числом лжецов, а каждый рыцарь дружит с чётным числом лжецов. Отсюда следует, что и рыцари, и лжецы дружат с нечётным количеством жителей острова, и, согласно лемме о рукопожатиях, количество рыцарей и количество лжецов чётно. Но тогда общее количество жителей острова чётно и не может равняться 2025.

Комментарий. Следующие критерии суммируются:

- 1) проведён полный анализ честности количества друзей у каждого рыцаря — 2 балла;
- 2) проведён полный анализ честности количества друзей у каждого лжеца — 2 балла;
- 3) применена лемма о рукопожатиях или аналогичное утверждение — 2 балла.

9.5. Вася вырезал из картона треугольник и занумеровал его вершины цифрами 1, 2 и 3. Оказалось, что, если Васин треугольник повернуть по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, 15 раз, то треугольник вернется в исходное положение. Если повернуть по часовой стрелке Васин треугольник вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, 6 раз, то треугольник вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, t раз, то треугольник вернется в исходное положение. Какое минимальное t мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы при каком-то картонном треугольнике?

Ответ: 5.

Решение. Пусть угол при первой вершине равен α градусов, при второй β градусов, а при третьей γ градусов. При поворотах вокруг вершин Васин треугольник, прежде чем вернуться в стартовое положение, мог сделать несколько полных оборотов.

Пусть при вращении вокруг вершины под номером 1 он сделал k полных оборотов, при вращении вокруг вершины под номером 2 — m полных оборотов,

вокруг вершины под номером 3 — n полных оборотов. Тогда из условия задачи следует, что $15\alpha = 360k$, $6\beta = 360m$ и $t\gamma = 360n$. Из первых двух уравнений находим, что $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$, значит $\alpha \geq 24$, $\beta \geq 60$. Заметим, что $t \geq 4$, так как иначе $\gamma > 120$, что в сумме с β больше 180.

$t \neq 4$, поскольку иначе $\gamma = 90$, значит $\alpha + \beta = 90$, чего быть не могло в силу $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$.

$t = 5$ подходит: возьмем треугольник с углами $\alpha = 48$, $\beta = 60$, $\gamma = 72$

Комментарий. По следующим трем позициям критерии суммируются:

- Доказано, что $t \geq 4$ — 3 балла.
- Доказано, что $t \neq 4$ — 2 балла.
- Приведен пример для $t = 5$ — 2 балла.

Если наименьшее значение не найдено, но приведен пример треугольника с таким свойством — 1 балл.