

Решения МЭ ВсОШ • 9 класс

Верные решения оцениваются в 7 баллов.

1. На уроке по математике 7 учеников написали контрольную. Учитель хочет, чтобы дети проверили работы друг у друга. Каждый ученик должен проверить работу ровно одного из оставшихся. Также учитель пронумеровал детей и хочет, чтобы выполнялись следующие условия:

- первый проверяет работу того, кто проверяет работу второго;
- второй проверяет работу того, кто проверяет работу третьего;
- ...
- седьмой проверяет работу того, кто проверяет работу первого;

Как детям выполнить инструкцию учителя?

Ответ. $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. **Решение.** Пример строится, если выписать числа от 1 до 7 в порядке возрастания, размещая их через одну позицию в вершинах семиугольника.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов. За недостаточное обоснование примера баллы не снимать.

2. Из пункта A в пункт B в 12:00 с постоянными скоростями отправились велосипедист и пешеход (скорость велосипедиста больше скорости пешехода). Велосипедист, доехав до пункта B повернул обратно и встретил пешехода в 13:00. Доехав до A , он снова развернулся и в 13:20 встретил пешехода. В каком часу пешеход дойдет до пункта B ?

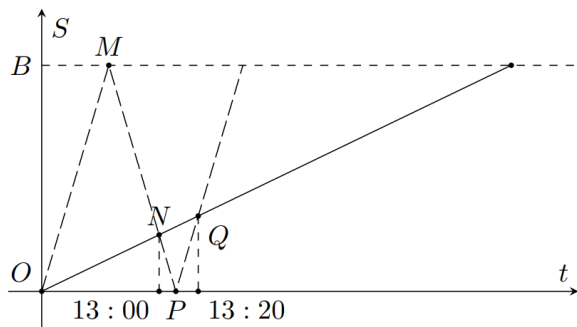
Ответ. 16:00.

Решение. Обозначим скорость пешехода за v , а расстояние от A до B возьмем за единичный отрезок. Тогда до первой встречи пешеход прошел расстояние v , а велосипедист $2 - v$. От первой встречи до второй пешеход прошел еще $v/3$, а велосипедист $2v + v/3$. Отношение их скоростей постоянно и равно отношению пройденных расстояний в обоих случаях, а значит $v : (2 - v) = (v/3) : (2v + v/3) = 1 : 7$, откуда получаем, что $v = 1/4$. Пешеход проходит четверть всего маршрута в час, а значит на весь путь он потратит 4 часа и прибудет в B в 16:00.

Приведем еще одно решение.

Решение. Построим график движения пешехода (сплошная линия) и велосипедиста (пунктирная линия). Начало координат соответствует пункту A и времени 12:00 на часах. Обозначим на графике начало

координат точкой O , момент прибытия велосипедиста в пункт B за M , первую встречу за N , прибытие велосипедиста в A за P и вторую встречу за Q . Скорость велосипедиста постоянна, значит у прямых OM и PQ равные коэффициенты наклона, откуда получаем, что они параллельны. Тогда треугольники OMN и QPN подобны с коэффициентом подобия $ON : NQ$. Заметим, что от начала движения до первой встречи прошло 60 минут и до второй встречи еще 20, откуда делаем вывод, что $ON : NQ = 60 : 30 = 3$, а $PQ = OM/3$. Получаем, что вторая встреча прошла на одной трети пути от A до B , что заняло у пешехода 1 час 20 минут, откуда делаем вывод, что весь путь занял 4 часа, а прибыл он в пункт B в 16:00.

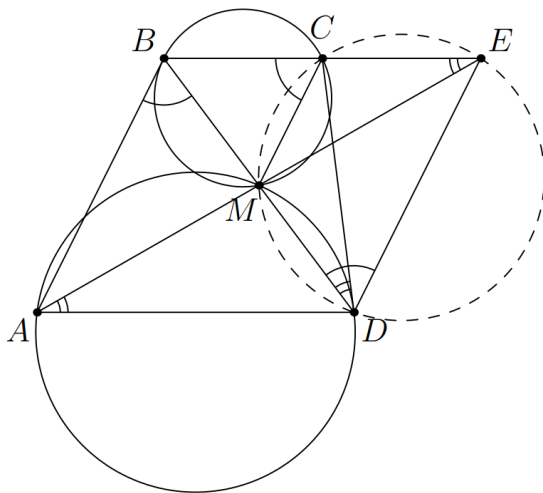


Критерии. Только ответ — 0 баллов. Составление таблиц и уравнений без существенных продвижений — 0 баллов. За найденное время в пути без указания времени прибытия **снимается** 1 балл. За необоснованное предположение, что расстояние или скорость равна определенной величине **снимается** 3 балла (но все еще можно вводить единичный отрезок).

3. M — середина диагонали BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC . Оказалось, что описанная окружность треугольника BCM касается прямой AB . Докажите, что описанная окружность треугольника ADM касается прямой CD .

Решение. Продлим отрезок AM на свою длину за точку M до точки E , тогда $ABED$ — параллелограмм. Условие касания окружности (ACM) и отрезка AB равносильно равенству углов ABD и BCM . Из равенства $\angle EDB = \angle ABD = \angle BCM$ следует вписанность четырехугольника $MCED$, откуда получаем равенство углов MDC и MEC .

Из равенства $\angle DAM = \angle CEM = \angle CDM$ получаем, что окружность (AMD) касается отрезка CD .



Критерии. Замечание, что касание можно свести к равенству углов — 1 балл. Вписанность четырехугольника $DMCE$ без дальнейших продвижений — 3 балла.

4. Число x представимо в виде дроби n/m . Числа $5x$, $7x$ и $8x$ округлили до ближайшего целого и сложили. В результате получилось 97. Для какого наименьшего m такое возможно? (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше $1/2$, и в большую, если дробная часть больше либо равна $1/2$.)

Ответ. 6. Решение. Округление числа a находится в полуинтервале $(a - 1/2; a + 1/2]$, а значит наша сумма находится в пределах $20x - 3/2 < 97 \leq 20x + 3/2$ и если решить неравенства по отдельности, то получим $4\frac{31}{40} \leq x < 4\frac{37}{40}$. В данном диапазоне минимальное значение знаменателя равно 5, в этом можно убедиться перебрав все меньшие знаменатели. Дробь со знаменателем 5, ровно одна $x = 4\frac{4}{5}$, проверим, подойдет ли данное значение под начальные условия: $5x = 24$, $7x = 33\frac{3}{5}$ и $8x = 38\frac{2}{5}$ округляются до чисел 24, 34 и 38 соответственно, что в сумме дает 96 и не подходит под начальные условия. Проверим дробь $x = 4\frac{5}{6}$ на выполнение начальных условий: $5x = 24\frac{1}{6}$, $7x = 33\frac{5}{6}$ и $8x = 38\frac{2}{3}$ округляются до чисел 24, 34 и 39 с суммой 97, что подходит под начальные условия, а значит наименьшее $m = 6$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Дана правильная оценка для округления числа — 1 балл. Найден ответ $m = 5$, но не проведена проверка — 4 балла. Если отброшена целая часть, равная 4 и приведено решение для суммы 17, баллы **не** снимать.

5. Для целых чисел a и b известно, что $a^2 + a = 2b^2 + b$. Докажите, что $a - b$ является квадратом некоторого целого числа.

Решение. Для удобства введем обозначение $a - b = t$, тогда $b = a - t$, а наше уравнение перепишем в виде $a^2 + a = 2(a - t)^2 + (a - t)$ и необходимо доказать, что t является квадратом некоторого целого числа. Преобразуем данное выражение в квадратное уравнение относительно a , получим $a^2 - 4ta + 2t^2 - t = 0$. Корни этого уравнения должны быть целыми числами. Следовательно, дискриминант можно представить как квадрат некоторого целого числа:

$$D = 16t^2 - 4(2t^2 - t) = 4t(2t + 1).$$

Значит, $t(2t + 1)$ является квадратом некоторого целого числа. Любой делитель числа t не может быть делителем числа $2t + 1$, откуда $\text{НОД}(t; 2t + 1) = 1$. Следовательно, в произведении $t(2t + 1)$ каждый множитель по отдельности квадрат целого числа, с точностью до знака.

Критерии. Отметим, что из-за ошибки в условии, утверждение задачи верно не всегда, автором подразумевалась натуральность чисел a и b .

Поэтому если в работе говорится, что утверждение задачи неверно и приводится контрпример (например, $a = -1$, $b = 0$) — 7 баллов.

Если задача решалась для натуральных чисел a , b , то баллы не снимать и оценивать продвижения по задаче следующим образом: введение замены $a - b = t$ — 0 баллов; не доказана взаимная простота t и $2t + 1$ — снимается 1 балл; утверждение о том, что произведение взаимнопростых множителей квадрат, значит каждый множитель квадрат является общеизвестным.