

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
9 класс

Задача 9.1

Условие:

Глеб и Юрий живут в одном доме, но в разных квартирах. Глеб сказал Юре: «Если сложить номера квартир, в которых мы живем, то получится произведение этих номеров». Докажите, что Глеб ошибается.

Решение:

Пусть Глеб живет в квартире, номер которой равен x , а Юра в квартире с номером y . Глеб утверждает, что $x + y = x \cdot y$.

Следовательно, имеем:

$$x + y - x \cdot y = 0.$$

Отнимем 1 из каждой части уравнения:

$$x + y - x \cdot y - 1 = -1,$$

$$x(1 - y) - (1 - y) = -1,$$

$$(1 - y)(x - 1) = -1.$$

Так как x и y – целые числа, то возможны два случая:

$$\begin{cases} 1 - y = 1, \\ x - 1 = -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 - y = -1, \\ x - 1 = 1. \end{cases}$$

В первом случае $x = y = 0$, во втором случае $x = y = 2$, оба варианта не удовлетворяют условию задачи.

Дополнительные критерии:

Необоснованное утверждение, что равенство $x + y = x \cdot y$ верно только при $x = y = 0$ и $x = y = 2$ оценивается в 0 баллов.

Задача 9.2

Условие:

Игра в морской бой происходит в квадрате 7×7 клеток. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить четырехпалубный корабль (в игре 4-палубный корабль один, он занимает 4 подряд идущие клетки).

Ответ: 12 выстрелов.

Решение:

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
9 класс

Площадь исходного квадрата 49 кв.ед. Поэтому максимально можно расставить не более 12 четырехпалубных корабля ($12 \cdot 4 = 48$).

Вариант расстановки 12 кораблей в квадрате 7×7 указан на рисунке а). Можно заметить, что для расстановки 12 кораблей центральная клетка должна быть не занятой.

Итак, менее чем 12 выстрелами обойтись нельзя.

С другой стороны, указанные на рисунке б) 12 выстрелов гарантируют попадание в любой линейный четырехклеточный корабль, где бы он ни стоял.

6				7	8	9
5						
4						
3	2	1				
			10			
			11			
			12			

а)

			X			
			X			
		X		X		
X	X				X	X
		X		X		
			X			
			X			

б)

Дополнительные критерии:

Только ответ – 0 баллов

Дана оценка, что выстрелов не менее 12 – 4 балла

Приведен пример для 12 выстрелов – 3 балла

Задача 9.3

Условие:

Книга состоит из 30 рассказов. Все рассказы занимают разное количество страниц: от 1, 2, ..., 30 страниц. Первый рассказ печатается с первой страницы, каждый следующий рассказ начинается с новой страницы. Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечетной страницы?

Ответ: 23.

Решение:

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
9 класс

После каждого рассказа с нечетным числом страниц меняется четность начальной страницы следующего рассказа. Поэтому четность начальной страницы меняется не меньше 14 раз (один из 15 рассказов с нечетными числом страниц может оказаться в книге последним). Таким образом, не менее 7 раз рассказы начинаются с четной страницы и тем самым не более 23 раз – с нечетной. Если в начале книги поместить все рассказы с четным числом страниц, а затем с нечетным, то ровно 23 рассказа будут начинаться с нечетных страниц.

Дополнительные критерии:

Только ответ – 0 баллов.

Замечено, что если некоторый рассказ содержит четное число страниц, то следующий рассказ начинается со страницы той же четности – 2 балла, замечено, что если некоторый рассказ содержит нечетное число страниц, то следующий рассказ начинается со страницы другой четности – 2 балла.

Баллы суммируются, если обоснованно приведены оба утверждения

Задача 9.4

Условие:

Двое играют в следующую игру. Первый называется три любых отличных от нуля числа, а второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек в выражении $*x^2 + *x + *$. Первый игрок считается выигравшим, если полученный квадратный трехчлен имеет два различных рациональных корня. Доказать, что этот игрок может добиться победы.

Решение:

Первому игроку достаточно назвать числа 1; 2; –3. То, что он выигрывает, доказывается непосредственно проверкой. Вообще первый игрок может назвать любые отличные от нуля попарно различные рациональные числа, сумма которых равна нулю. Непосредственно убеждаемся, что полученных трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корень $x_1 = 1$; по теореме Виета второй его корень есть $x_2 = \frac{c}{a} \neq 1$.

Дополнительные критерии:

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
9 класс

Если предложены три числа и проверено, что все возможные перестановки приводят к многочлену с рациональными корнями, – 7 баллов.

Если предложены три числа, удовлетворяющие условию задачи, но не рассмотрены все случаи при проверке, или нет обоснования, что любая перестановка ведет к многочлену с рациональными корнями, не более 3 баллов.

Задача 9.5

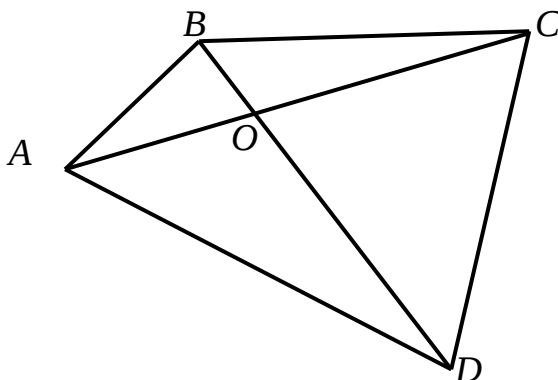
Условие:

Ученик Вася рассматривал выпуклый четырехугольник с периметром, равным 2025 см. Он нашел длины диагоналей четырехугольника и сложил их. Мог ли Вася подучить в сумме 1000 см? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет, не мог.

Решение:

Рассмотрим четырехугольник со сторонами $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O .



Применим неравенство треугольника для треугольников ABO , BCO , CDO , ADO :

$$AO + BO > AB,$$

$$BO + CO > BC,$$

$$CO + DO > CD,$$

$$DO + AO > AD$$

Из записанных неравенств следует:

$$AO > AB - BO,$$

$$BO > BC - CO,$$

$$CO > CD - DO,$$

$$DO > AD - AO.$$

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
9 класс

Складывая последние 4 неравенства, имеем:

$$AC + BD > (AB + BC + CD + AD) - (AC + BD),$$

$$2(AC + BD) > AB + BC + CD + AD, \text{ то есть}$$

$$AC + BD > \frac{P_{ABCD}}{2}.$$

Итак, сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше полупериметра этого четырехугольника.

Но $1000 < \frac{2025}{2}$, следовательно, Вася не мог получить 1000 см.

Дополнительные критерии:

Если ученик записал, но не доказал, что сумма диагоналей больше полупериметра, ставить 1 балл.