

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ПО МАТЕМАТИКЕ 2025–2026 уч. г.

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ТРЕБОВАНИЯ

Центральной Методической Комиссии всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025/2026 учебном году
по проверке и оцениванию решений заданий муниципального этапа

1. Порядок формирования жюри Олимпиады: из ведущих учителей школ муниципального образования, методистов муниципальных и региональных органов управлений образования, преподавателей, студентов и аспирантов вузов региона.

2. Требования к проверке работ:

Для объективности проведения Олимпиады обязательной является шифровка работ, проводимая членами оргкомитета олимпиады. Решение каждой задачи оценивается Жюри в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен существенный (обычно, более сложный, а не частный) случай, получена основная оценка..
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии верного решения или имеются начальные продвижения..
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Дополнение Региональной Методической Комиссии: максимальная оценка за каждую задачу – 7 баллов, независимо от количества пунктов в ней (таким образом, общая максимальная оценка участника за 5 задач может быть 35 баллов). Если в задаче два пункта, то максимальная оценка за решение лишь одного пункта – 4 балла. Наличие только ответа в задаче без обоснования не оценивается.

Жюри рассматривает записи решений, приведенные в чистовике. Черновик рассматривается только в случае ошибочного переноса записей из черновика в чистовик; Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты. Недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении; но баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи

Участники школьного этапа олимпиады были вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они обучаются. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

Результаты проверки всех работ участников Олимпиады члены Жюри заносят в итоговую таблицу.

3. Требования к порядку шифрования работ.

Работы участников перед проверкой обязательно шифруются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра (например 9-01, 9-02, ...) на обложке тетради (на титульном листе) и на первой белой странице тетради (на каждой странице листа чистовика) с последующим снятием обложки (титульного листа) и ее отдельным хранением до окончания проверки. Расшифровка работ осуществляется после составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призеров олимпиады.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Время выполнения 180 минут. Максимальное количество баллов – 35 баллов.

Максимальный балл за каждую задачу – 7 баллов

9.1. Найдите значения параметра a , при которых два уравнения $a - 2ax = 11$ и $3x - a = 19$ имеют общий целый корень?

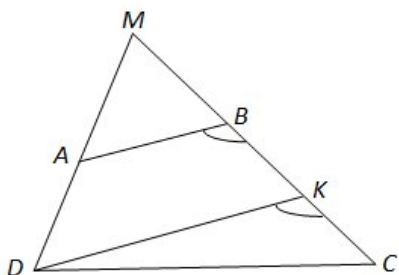
Ответ. $a = -1$. **Решение.** Решая эти уравнения как систему с неизвестными x и a , выразим a из второго уравнения и подставим в первое. Получим квадратное уравнение $6x^2 - 41x + 30 = 0$. У него два корня: 6 и $5/6$. Для целого корня $x = 6$ соответствующее значение $a = 3x - 19 = -1$.

9.2. а) Найдите такую пару двузначных чисел, что если к первому из них прибавить 30, а из второго вычесть 20, то полученные числа останутся двузначными, а их произведение окажется равным произведению исходных чисел. б) Сколько всего таких пар?

Ответ. б) 19. **Решение.** а) Например, подходит пара 15 и 30. Другие пары указаны в решении пункта б). б) Пусть первое число x , а второе – y . По условию задачи x , $x + 30$, y и $y - 20$ – числа двузначные, поэтому $10 \leq x \leq 69$, $30 \leq y \leq 99$. Так как $xy = (x + 30)(y - 20)$, то имеем уравнение $3y - 2x = 60$. Отсюда следует, что x делится на 3, а y – на 2, т.е. $x = 3x_1$, $y = 2y_1$ и уравнение после деления на 6 запишется в виде $y_1 - x_1 = 10$. В силу указанных неравенств, $y_1 \leq 15$ и поэтому $x_1 = y_1 - 10 \leq 5$. С другой стороны, из неравенства $x \leq 69$ следует, что $x_1 \leq 23$. Таким образом, 19 значений x_1 соответствуют искомым парам (начиная с пары (15, 30) и заканчивая парой (69, 66)). **Другое обоснование пункта б)** после уравнения $3y - 2x = 60$. Получили линейное уравнение в целых числах, которому удовлетворяют $x = 15$, $y = 30$. Значит, множество решений этого уравнения имеет вид: $x = 15 + 3n$, $y = 30 + 2n$, где n – целое. В силу неравенства $10 \leq x \leq 69$, получим: $-1 \leq n \leq 18$, и аналогично, из условия $30 \leq y \leq 99$ получим: $0 \leq n \leq 34$. Этим двум ограничениям на n удовлетворяют $0 \leq n \leq 18$. Таким образом, имеем 19 пар.

9.3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что угол A больше угла D , а угол B больше угла C . Можно ли утверждать, что $AB < CD$?

Ответ. Можно. **Решение.** Углы A , B , C , D обозначим через a , b , c , d , соответственно. Поскольку $a + b + c + d = 360^\circ$



и $c + d < a + b$, то $c + d < 180^\circ$ и значит, прямые DA и CB пересекаются в точке, скажем, M , лежащей в той же полуплоскости относительно прямой DC , что и четырехугольник $ABCD$. Рассмотрим $DDMC$. На его сторонах DM и CM лежат точки A и B . Если $AB \parallel DC$, то утверждение задачи очевидно, т.к. $DAMB$ подобен $DDMC$ с коэффициентом подобия меньше единицы.

Если же отрезки AB и DC не параллельны, то $a + d > 180^\circ$, $b + g > 180^\circ$ и поэтому верно хотя бы одно из строгих неравенств: $d > 180^\circ - a$ или $g > 180^\circ - b$ (иначе сложение неравенств $a + d < 180^\circ$ и $b + g < 180^\circ$ приводит к противоречию с равенством $a + b + g + d = 360^\circ$). Пусть, для определенности, $d > 180^\circ - a$. Проведем через точку D луч, параллельный AB (в той же полуплоскости относительно прямой DA , где лежит $ABCD$). Тогда он пройдет внутри угла ADC и пересечет отрезок BC в некоторой внутренней точке, скажем, K . Значит, треугольники AMB и DMK подобны, поэтому $AB < DK$. Но в $DDKC$ угол DKC равен b (по свойству параллельных AB и DK , пересеченных прямой MC). Следовательно, в $DDKC$ против угла DKC , большего, чем угол C , лежит сторона $DC > DK$. Итак, $DC > DK > AB$.

9.4. Дан правильный 99-угольник. Произвольные 50 его вершин отмечены. Назовём диагональ отмеченной, если у неё отмечены оба конца. Докажите, что для любой диагонали этого 99-угольника найдётся равная ей отмеченная диагональ.

Решение. Пусть $A_1 A_2 \dots A_{99}$ - данный 99-угольник (нумерация вершин последовательная, начиная с A_1 по часовой стрелке) и пусть $A_i A_j$ - данная диагональ ($i < j$). Любой отмеченной вершине A_m поставим в соответствие вершину A_{m+j-i} (где понимается, что $A_{100} = A_1$, $A_{101} = A_2$ и т.д.), т.е. вершину после A_m через $(j-i)$ вершин по часовой стрелке. Тогда для некоторой из отмеченных вершин соответствующая ей вершина также будет отмеченной, т.к. в противном случае в многоугольнике было бы не менее $50 \cdot 2 = 100$ вершин. Поэтому такая пара вершин представляет собой концевые точки искомой диагонали (между ними по часовой стрелке столько же вершин правильного 99-угольника, сколько между A_i и A_j).

9.5. В клетчатом квадрате 7×7 вначале в каждой клетке записаны нули. За один ход разрешается выбрать столбец и прибавить любое положительное число к любым двум соседним клеткам в выбранном столбце (прибавляемое число можно менять от хода к ходу). Можно ли за несколько ходов составить квадрат, в котором суммы во всех семи строках одинаковы?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Обозначим через A сумму 28 чисел в четырех строках с нечетными номерами, а через B - сумму 21 числа в остальных трех строках (с четными номерами). Заметим, что к A и к B при каждом ходе прибавляется одно и то же число (зависящее от хода). Поэтому разность $A-B$ остаётся постоянной. Если, от противного, предположить, что удастся составить искомый квадрат с одной и той же суммой $S > 0$ в каждой строке, то получим: $A = 4S$, $B = 3S$. Тогда $A - B = S > 0$, в то время как вначале имели $A = 0$, $B = 0$ и $S = 0$. Противоречие.