

**МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ
(КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)
Максимальное количество баллов – 42 балла**

Решение и критерии

1. Представить 2025 как разность квадратов двух натуральных чисел.

Ответ. Например: $2025 = 1013^2 - 1012^2$

Комментарий. Можно воспользоваться равенством

$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, т.е. любое нечетное число представимо в виде разности квадратов.

Критерии. Приведен верный пример – **7 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

2. В аудитории 14 парт, за которые садятся 27 школьников (не более, чем два человека за партой). Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Когда учащиеся на первом уроке расселись за парты, каждый из них сказал: «Я сижу с лжецом». На следующем уроке (в этой же аудитории) они сели в новой комбинации. Мог ли после этого каждый сказать: «Я сижу с рыцарем»? Ответ поясните.

Ответ. Не мог.

Решение. Фраза «Я сижу с лжецом» могла быть произнесена только в том случае, если за одной партой сидят лжец и рыцарь. Ученик, сидящий один – лжец, так как он точно не сидит с лжецом. Таким образом, в классе 13 рыцарей и 14 лжецов. Вторая фраза «Я сижу с рыцарем» могла быть сказана только, если за одной партой сидят либо два рыцаря, либо два лжеца. В этом случае один рыцарь остается без пары, так как 13 – нечетное, но он не сможет сказать, что сидит с рыцарем, так как сидит один. Если же сидящий один – лжец, то существует парта, за которой сидят рыцарь с лжецом, так как 13 рыцарей иначе рассадить нельзя, ни один из них фразу «Я сижу с рыцарем» произнести не может.

Критерии. Приведены верные рассуждения, получен верный ответ – **7 баллов**. Сделан верный вывод на основании условия, что в классе рыцарей 13, а лжецов 14, но дальнейших продвижений нет – **2 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

3. Найдите все решения неравенства.

$$\sqrt{(2025-x)^2} + (\sqrt{x-2025})^2 \leq x$$

Ответ. [2025;4050]

Решение. $\sqrt{(2025-x)^2} + (\sqrt{x-2025})^2 \leq x$

$$\begin{cases} |2025-x| + (x-2025) \leq x \\ x-2025 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2025 + (x-2025) \leq x \\ x \geq 2025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4050 \\ x \geq 2025 \end{cases}$$

Критерии. Приведены верные рассуждения, получен верный ответ – **7 баллов.**

Ответ (2025;4050] или [2025;4050) т.е. потеряна одна точка - **4 балла.**

Задача сведена к верной системе, не содержащей знака корня, без дальнейших продвижений или с ошибочными продвижениями - **2 балла.** Иначе - **0 баллов.**

4. Воздухоплаватель Петя загружает корзину воздушного шара большими и маленькими мешками с песком. Если положить 4 больших мешка и 11 маленьких, шар легко взлетает с таким грузом. Если положить 9 больших и два маленьких, шар не взлетит из-за перегрузки. Взлетит ли шар, если положить 17 маленьких мешков?

Ответ. Да, взлетит.

Решение. Обозначим x – вес больших мешков, y – вес маленьких

мешков, тогда $4x+11y < 9x+2y$, откуда $y < \frac{5}{9}x$ ₍₁₎.

Проанализируем вес 17 маленьких мешков. Если он меньше $4x+11y$, то шар точно взлетит, если больше $9x+2y$, то точно не взлетит, если между ними, то не известно.

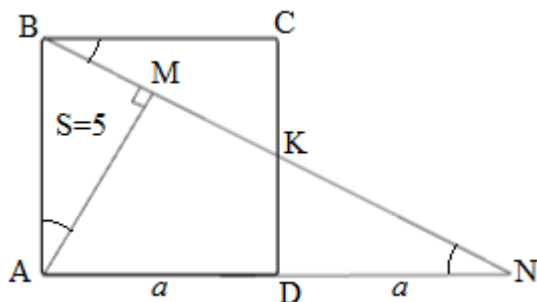
Найдем условие, при котором $17y < 4x+11y \Rightarrow y < \frac{2}{3}x \Rightarrow y < \frac{6}{9}x$ ₍₂₎ (но

$y < \frac{5}{9}x$) – выполняется. Шар взлетит.

Критерии. Получено верное и обоснованное решение - **7 баллов.** Получены оценки типа (1), (2) - по **2 балла** за каждую (суммируются). Иначе - **0 баллов.**

5. В квадрате ABCD на стороне CD взята точка K, прямые BK и AD пересекаются в точке N, при этом AD=DN. Площадь прямоугольного треугольника ABM ($M \in BK$) равна 5. Найти площадь квадрата ABCD.
Ответ 25.

Решение



$\triangle ABM \sim \triangle AMN$ (по двум

углам), $k = \frac{AN}{AB} = \frac{2a}{a} = 2$.

$$\Rightarrow S_{AMN} = S_{ABM} \cdot k^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

$\triangle DKN = \triangle BCK$ (по катету и
острому углу)

$$\Rightarrow S_{AMN} = S_{ADKM} + S_{DKN} = S_{ADKM} + S_{BCK} = 20.$$

$$S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{ADKM} + S_{BCK} = 5 + 20 = 25.$$

Критерии. Получено верное и обоснованное решение - **7 баллов**.

Найдена площадь треугольника ABN (или AMN) - **2 балла**. Иначе - **0 баллов**.

6. Вася купил на распродаже компьютерную игру "Двурукий бандит" и решил её опробовать. В игре надо запустить один за другим два игровых автомата, каждый из которых выводит на экран число: 1, 2 или 3. Результат, который выведет второй автомат, зависит от того, что выведется на первом автомате.

Из инструкции Вася знает, что все результаты первого автомата равновероятны. Также в инструкции написано, что вероятность получить на экране второго автомата число 2 – 0,25.

После просмотров гайдов Васе удалось выяснить ещё несколько вероятностей исхода запусков двух автоматов подряд:

вероятность получить сумму чисел 4 - $1/6$;

вероятность получить на первом автомате 2, на втором 1 - $1/6$;

вероятность получить на первом автомате 2, а на втором 3 - $1/6$;

вероятность получить сумму чисел 5 - $1/3$.

Вася уже устал и хочет узнать последнее важное ему значение - вероятность того, что сумма результатов запуска двух автоматов подряд будет минимальной либо максимальной. Помогите Васе.

Ответ. 0,25

Решение:

Обозначим результат на первом автомате за i , а на втором за j , тогда вероятность события "первый автомат вывел 1, а второй 2" будем записывать как $p(i=1, j=2)$

1) Так как значения на первом автомате равновероятны, то можно сразу посчитать $p(i=1)=p(i=2)=p(i=3)= 1/3$.

- 2) $p(i=2)=p(i=2, j=1)+p(i=2, j=2)+p(i=2, j=3)$, следовательно,
 $1/3=1/6 + p(i=2, j=2) + 1/6$, то $p(i=2, j=2)=0$
- 3) Вероятность того, что сумма двух значений на двух экранах равна 5:
 $p(\text{сумма } 5)=p(i=2, j=3)+p(i=3, j=2)$, следовательно,
 $p(i=3, j=2) = 1/3 - 1/6 = 1/6$.
- 4) По аналогии с шагом 2, зная $p(j=2)$,
 $p(j=2)=p(i=1, j=2)+p(i=2, j=2)+p(i=3, j=2)$, следовательно,
 $1/4 = p(i=1, j=2) + 0 + 1/6$, откуда $p(i=1, j=2) = 1/4 - 1/6 = 1/12$.
- 5) Вероятность того, что сумма значений на двух экранах минимальна либо максимальна, равна $p(i=1, j=1) + p(i=3, j=3)$
 Считаем вероятность через противоположное событие:
 $p(\max U \min) = 1 - p(\text{всех других исходов}) = 1 - 9/12 = 1/4$

2 способ. Решение опирается на таблицу.

Выделим ячейки информация, в которых известна. Первая стрелка означает сумму вероятностей случаев получить на двух автоматах 4, это возможно в трех случаях, т.е. $p(i=1, j=3)+p(i=2, j=2)+p(i=3, j=1)=1/6$. Вторая стрелка - сумма вероятностей случаев получить на двух автоматах 5, это возможно в двух случаях, т.е. $p(i=2, j=3)+p(i=3, j=2)=1/3$

1 автомат →				
2 автомат ↓	1	2	3	сумма 1/6
1		1/6		
2			1/3	1/4
3		1/6		
сумма	1/3	1/3	1/3	

- Находим значение $p(i=2, j=2)=1/3-1/6-1/6=0$
- Находим значение $p(i=3, j=2)=1/3-1/6=1/6$

1 автомат →				
2 автомат ↓	1	2	3	сумма 1/6
1		1/6		
2	1/12	0	1/6	1/4
3		1/6		
сумма	1/3	1/3	1/3	

3) Находим значение $p(i=1, j=2) = 1/4 - 1/6 - 0 = 1/12$

4) Итог: $p(\max U_{\min}) = p(i=1, j=1) + p(i=3, j=3) = 1 - 1/6 - 1/12 - (p(i=3, j=1) + p(i=3, j=3)) - 1/6 - 1/6 = 1 - 4/6 - 1/12 = 1 - 9/12 = 1/4$

Критерии. Получено верное и обоснованное решение - **7 баллов**.

Решение верное, но допущена арифметическая ошибка - **6 баллов**.

Найдена вероятность $p(i=1; j=2)$ - **2 балла**. Иначе - **0 баллов**.