

Задачи муниципального этапа 2025-2026 учебного года

9 класс

9.1. Докажите, что $2^{39}+2^9$ делится на 100.

Решение. Преобразуем:

$2^{39}+2^9=2^9((2^{10})^3+1)=2^9(2^{10}+1)(2^{20}-2^{10}+1)=2^9\cdot 1025\cdot(2^{20}-2^{10}+1)=$
 $=4\cdot 1025\cdot 2^7\cdot(2^{20}-2^{10}+1)=4100\cdot 2^7\cdot(2^{20}-2^{10}+1)$. Это выражение делится на 100, значит, и исходное число также делится на 100, что и требовалось доказать.

9.2. Относительно чисел a, b, c, d известно, что $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$. Вычислите $ab+cd$.

Решение. Рассмотрим равенство: $(ac+bd)(ad+bc)=0$, так как $ac+bd=0$. Получаем $a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab=0$, или $(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab=0$. Так как $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$, то получаем: $ab+cd=0$.

Ответ: 0.

9.3. Точка D - середина стороны AC треугольника ABC , DE и DF - биссектрисы треугольников ABD и CBD . Отрезки BD и EF пересекаются в точке M . Докажите, что $DM=\frac{1}{2}EF$.

Решение. По свойству биссектрисы для треугольников ABD и CBD можно записать: $BE:EA=BD:DA=BD:DC=BF:FC$. Значит, по обратной теореме Фалеса $EF\parallel AC$, откуда $EM:MF=AD:DC=1:1$, то есть DM - медиана треугольника EDF . Но $\angle EDF=\angle EDB+\angle FDB=\frac{1}{2}\angle ADB+\frac{1}{2}\angle CDB=\frac{1}{2}(\angle ADB+\angle CDB)=90^\circ$. Таким образом, $DM=\frac{1}{2}EF$ по свойству медианы прямоугольного треугольника.

9.4. В коробке лежат несколько (больше трёх) шариков. Каждый покрашен в какой-то цвет. Если достать из коробки любые три шарика, то среди них обязательно будет хотя бы один красный и хотя бы один синий. Сколько шариков может быть в коробке?

Решение. В коробке не больше, чем по два красных и синих шарика (иначе можно было бы достать три красных или три синих) и не больше одного

шарика других цветов (иначе можно было бы достать один синий или красный шарик и два шарика других цветов). Получается, что шариков в коробке не больше пяти, причём если их пять, то среди них по два синих и красных и один - какого-то третьего цвета. Но тогда мы можем достать шарик третьего цвета и два синих. Значит, пяти шариков в коробке быть не может. Стало быть, их там четыре: два синих и два красных.

Ответ: 4.

9.5. В круг выложили 30 бусин (голубых и зелёных). У 26 бусин соседней была голубая, а у 20 бусин соседней была зелёная. Сколько было голубых бусин?

Решение. Найдём число бусин, рядом с которыми была и голубая, и зелёная: $26 + 20 - 30 = 16$. Число бусин, рядом с которыми были только голубые, равно $26 - 16 = 10$. Число голубых бусин равно $\frac{10 \cdot 2 + 16}{2} = 18$. Приведём пример такого расположения. Обозначим голубую бусину (г), зелёную – (з). Пусть бусины по кругу располагаются в следующем порядке по часовой стрелке: г з г г г г з г г г з г з г г г з з г г з г г з з з г г з, причём первая и последние бусины являются соседними. При этом все условия выполняются, и голубых бусин 18.

Ответ: 18 голубых бусин.