

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
Рязанская область

9 класс

1. Можно ли расставить на футбольном поле четырех футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними равнялись 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров?

Решение.

Расставим футболистов на одной прямой так. Чтобы расстояние между первым и вторым футболистами было 2 м, между вторым и третьим – 3 м, между третьим и четвертым – 1 м (футболисты перечислены в порядке их расположения на прямой).



2. На острове рыцарей и лжецов (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) каждый болеет ровно за одну футбольную команду. В опросе приняли участие все жители острова. На вопрос «Болеете ли Вы за «Спартак»?» ответили «Да» 40% жителей. На аналогичный вопрос про «Зенит» утвердительно ответили 30%, про «Краснодар» - 50%, а про ЦСКА – 0%. Какой процент жителей острова действительно болеет за «Спартак»?

Решение.

Пусть $x\%$ жителей острова составляют лжецы. Тогда $(100 - x)\%$ - рыцари.

Так как каждый рыцарь утвердительно ответил ровно на один из вопросов, а каждый лжец – на три, то $(100 - x) + 3x = 40 + 30 + 50$, откуда $x = 10$.

Так как ни один из жителей не сказал, что болеет за ЦСКА, то все лжецы болеют за ЦСКА. Каждый из них заявил, что болеет за «Спартак», поэтому за «Спартак» действительно болеют $40\% - 10\% = 30\%$.

Ответ: 30%

3. Доказать, что при любых целых и положительных значениях n число $\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4}$ целое и положительное.

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4} &= \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24} = \frac{n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)}{24} \\ &= \frac{n(n^3 + n^2 + 5n^2 + 5n + 6n + 6)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}\end{aligned}$$

При всех $n \geq 1$ полученное число целое и положительное.

4. Решите уравнение $f(f(f(x))) = 0$, где $f(x) = x^2 + x$.

Решение.

По условию $f(x) = x^2 + x$. Вычислим $f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$:

$$f(f(x)) = (f(x))^2 + f(x) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) = x(x+1)(x^2 + x + 1)$$

$$\begin{aligned}f(f(f(x))) &= f(f(x))^2 + f(f(x)) \\ &= (x(x+1)(x^2 + x + 1))^2 + x(x+1)(x^2 + x + 1) \\ &= x(x+1)(x^2 + x + 1)(x(x+1)(x^2 + x + 1) + 1)\end{aligned}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$x(x+1)(x^2 + x + 1)(x(x+1)(x^2 + x + 1) + 1) = 0.$$

Имеем

$$x = 0 \text{ или } x + 1 = 0 \text{ или } x^2 + x + 1 = 0 \text{ или}$$

$$x(x+1)(x^2 + x + 1) + 1 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = -1$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ — нет действительных корней}$$

$$x(x+1)(x^2 + x + 1) + 1 = 0$$

$$(x^2 + x)(x^2 + x + 1) + 1 = 0,$$

введем замену

$$x^2 + x = t,$$

тогда уравнение примет вид:

$$t^2 + t + 1 = 0, \text{ оно действительных корней не имеет.}$$

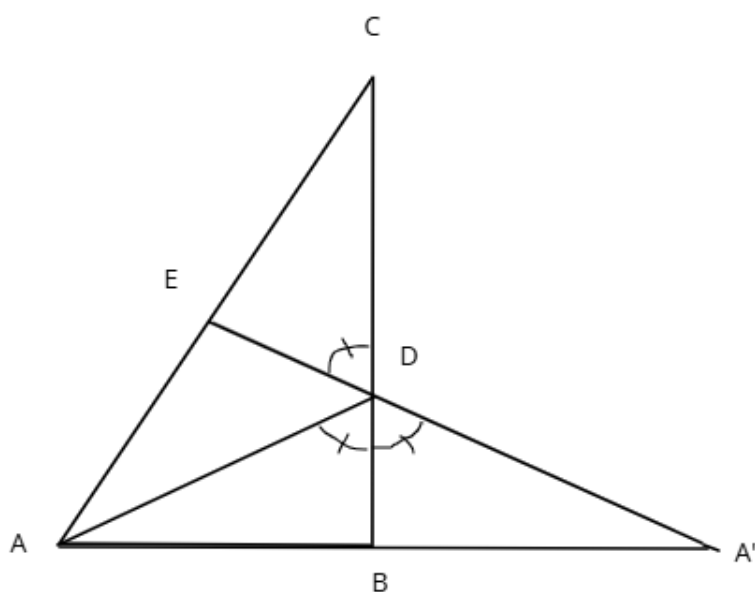
Отсюда имеем $x_1=0, x_2=-1$.

Ответ: $x_1=0, x_2=-1$.

5. Дан треугольник ABC , $\angle B = 90^\circ$. На сторонах AC , BC выбраны точки E и D соответственно, такие, что $AE=EC$, $\angle ADB = \angle EDC$. Найдите отношение $\frac{CD}{BD}$.

Решение.

1 способ. Построим треугольник $A'BC$, симметричный данному относительно стороны BC . Точки A' , D , E лежат на одной прямой, так как $\angle A'DB = \angle EDC$. Следовательно, D – точка пересечения медиан $A'E$ и CB треугольника $AA'C$, и делит их в отношении $2:1$ считая от вершины.



2 способ.

Используя теорему Менелая:

$$\frac{AE}{EC} * \frac{CD}{DB} * \frac{A'B}{A'A} = 1$$

Так как $\frac{AE}{EC} = 1$, то

$$\frac{CD}{DB} = \frac{A'A}{A'B}$$

Треугольник ADA' - равнобедренный, поскольку DB – высота и биссектриса. Следовательно, $AB=BA'$. Отсюда $A'A = 2A'B$,

$$\frac{CD}{DB} = \frac{2}{1}$$

Комментарий: Получен правильный ответ, но в решении присутствуют соотношения, которые используются, но не доказаны - 4 балла.