

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2025 – 2026 учебном году
9 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

9.1. На доске записано число 20. Каждую минуту с числом, записанным на доске, проделывают одну из четырёх операций: число либо умножают на 2, либо делят на 2, либо умножают на 5, либо делят на 5. Результат операции выписывают на доску, а предыдущее число стирают. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 250.

Решение:

Способ 1. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Каждую минуту в это выражение либо добавляется один из множителей 2 или 5, либо из него убирается один такой множитель (если в какой-то момент возникает дробное число, считаем, что множители, стоящие в знаменателе, находятся в отрицательном количестве, то есть, например, в числе $\frac{5}{4}$ один множитель 5 и минус два множителя 2). Значит, за чётное число минут чётность общего числа множителей не изменится, поэтому через 60 минут в числе будет по-прежнему нечётное количество простых множителей, в то время, как число $250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ состоит из четырёх таких множителей.

Способ 2. Предположим противное, и пусть всего было x умножений на 2, y умножений на 5, z делений на 2 и t делений на 5. Всего было сделано 60 операций, а в итоге получилось число $20 \cdot \frac{2^x}{2^z} \cdot \frac{5^y}{5^t}$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} x + y + z + t = 60, \\ 20 \cdot \frac{2^x}{2^z} \cdot \frac{5^y}{5^t} = 250. \end{cases}$$

Второе уравнение системы приводится к виду $2^{x+1} \cdot 5^y = 2^z \cdot 5^{t+2}$. Отсюда (так как разложение любого числа на простые множители единственно) следует, что $x + 1 = z$, а $y = t + 2$. Подставив эти значения в первое уравнение системы, получим $2x + 2t + 3 = 60$, откуда $x + t = \frac{57}{2}$ — число не целое. Противоречие.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Условие задачи верно записано в виде уравнения (системы уравнений) в целых числах	3 балла
Замечено, что причина невозможности в чётности общего количества операций	2 балла
Доказываемое утверждение проиллюстрировано конкретными примерами	0 баллов

9.2. Для квадратного трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами a и b при любом действительном значении x выполнено неравенство $p(x) \geq -0,9$. Докажите, что при любом действительном значении x выполнено и более сильное неравенство $p(x) \geq -0,25$.

Решение:

Способ 1. Условие на квадратный трёхчлен означает, что дискриминант трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b + 0,9$, равный $a^2 - 4b - 3,6$, неположителен. А доказать требуется неположительность дискриминанта трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b + 0,25$, то есть неравенство $a^2 - 4b - 1 \leq 0$. Число $a^2 - 4b$ — целое, и при делении на 4 в остатке даёт либо 0, либо 1 (в зависимости от чётности числа a). Оно не больше 3,6, поэтому оно не больше 1, что и требовалось доказать.

Способ 2. Наименьшее значение квадратного трёхчлена с положительным старшим коэффициентом достигается в вершине параболы, то есть в точке с абсциссой $-\frac{a}{2}$. Возможны два случая.

1) Число a чётное. Тогда вершина параболы лежит в целочисленной точке, и значение трёхчлена в этой точке также является целым числом. Так как оно не меньше числа $-0,9$, то оно не меньше нуля. В этом случае весь трёхчлен лежит не ниже оси абсцисс, то есть значения во всех точках неотрицательны.

2) Число a нечётно. Тогда абсцисса вершины параболы — число полуцелое, и значение в этой вершине равно $-\frac{a^2}{4} + b = n - \frac{1}{4}$, где n — некоторое целое число. Так как это значение не меньше $-0,9$, число n не может быть отрицательным, поэтому значение квадратного трёхчлена в вершине (а тогда и во всех точках) не меньше $0 - \frac{1}{4} = -0,25$, что и требовалось доказать.

Примечание: Доказываемое неравенство не может быть усилено: для любого приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом, равным 1, (например, для $p(x) = x^2 + x$) его наименьшее значение будет в точности равным $-0,25$.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верно рассмотрен только случай чётного числа a	3 балла
Объяснено, что достаточно рассматривать значение $p(x)$ только в точке $x_0 = -a/2$ ИЛИ условие верно сведено к анализу дискриминантов двух квадратных трёхчленов	2 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также иллюстрация условия конкретными примерами	0 баллов

9.3. Незнайка последовательно измерил расстояния от некоторой точки P внутри квадрата $ABCD$ до четырёх его вершин и получил числа 1 см, 4 см, 8 см, 7 см. Докажите, что Незнайка ошибся.

Решение: Без ограничения общности пусть ближайшая к точке вершина квадрата левая верхняя. Тогда самая далёкая от неё – правая нижняя. Также можно считать, что правая верхняя ближе левой нижней. Пусть расстояния от точки до левой, верхней, правой и нижней сторон квадрата равны a , b , c и d см. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 64$, $a^2 + d^2 = 49$ и $b^2 + c^2 = 16$. Из четырёх уравнений одно является следствием трёх других, а из остальных получаем $b = \sqrt{1 - a^2}$, $d = \sqrt{49 - a^2}$, $c = \sqrt{15 + a^2}$. Так как $a + c = b + d$ (это длина стороны квадрата), отсюда имеем

$$a + \sqrt{15 + a^2} = \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{49 - a^2}.$$

Число $a \leq 1$, так как расстояние от точки до стороны не больше, чем расстояние от неё до вершины, лежащей на этой стороне. Но тогда левая часть меньше $1 + \sqrt{16} = 5$, а правая часть больше $\sqrt{48}$, что больше 5. Равенство невозможно, значит, Незнайка ошибся.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Получено, но не решено уравнение от одной переменной, верно описывающее полученные Незнайкой результаты	4 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

9.4. В школе прошёл однокруговой шахматный турнир (каждый участник сыграл с каждым ровно один раз). В нём участвовали и мальчики, и девочки, причём девочек было в 3 раза больше. За выигрыш давалось одно очко, за ничью —

пол-очка, за поражение — 0 очков. После окончания соревнований оказалось, что девочки в сумме набрали на 20% очков больше, чем мальчики. Какое минимальное количество школьников могло участвовать в турнире?

Решение: Чтобы не возиться с дробями, будем считать, что за победу давалось два очка, а за ничью — одно. Условие задачи при этом не изменится.

Пусть мальчики в сумме набрали a очков, тогда девочки набрали $1,2a$ очков, а доля очков, набранных мальчиками, равна

$$\frac{a}{2,2a} = \frac{5}{11}.$$

Пусть, кроме того, в турнире было $3x$ девочек и x мальчиков. Тогда общее количество партий турнира (оно вдвое меньше общего количества набранных очков) равно

$$\frac{4x(4x - 1)}{2} = 2x(4x - 1).$$

Следовательно, мальчики набрали

$$\frac{5}{11} \cdot 2 \cdot 2x(4x - 1) = \frac{20x(4x - 1)}{11}$$

очков. Это число целое, поэтому число $x(4x - 1)$ обязано делиться на 11. Наименьшее натуральное x с таким свойством — число 3.

Приведём пример турнира при $x = 3$. Пусть в турнире было 3 мальчика и 9 девочек. Мальчики выиграли все партии у девочек (27 партий) и набрали в партиях с девочками 54 очка. Ещё 6 очков они набрали в поединках между собой. В сумме мальчиками набрано 60 очков. Девочки набирали очки только в партиях между собой ($(9 \cdot 8)/2 = 36$ партий) и набрали 72 очка, что на 12 очков (или на 20%) больше, чем мальчики.

Примечание: Не очень сложно доказывается, что пример турнира, удовлетворяющего условию задачи, единственен: при $x > 3$ количество очков, набранных девочками в партиях между собой, превышает $6/11$ от общего количества разыгрываемых очков.

Ответ: 12 школьников.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример турнира, удовлетворяющего условию	4 балла
Доказано, что ситуация невозможна, если число мальчиков меньше трёх И/ИЛИ установлено какое-либо ограничение сверху на количество участников турнира (достаточно только мальчиков)	2 балла
Верный ответ без обоснования ИЛИ доказательство невозможности ситуации, когда мальчик один	1 балл
Замечание, что количество участников турнира кратно 4, а также любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

9.5. Для какого наибольшего натурального числа n существует единственное натуральное число k , удовлетворяющее неравенству

$$\frac{5}{6} < \frac{k}{n} < \frac{6}{7} ?$$

Ответ обоснуйте.

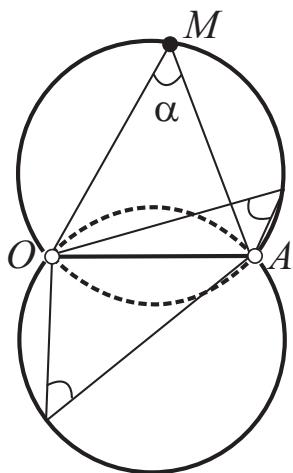
Решение: Так как $\frac{5}{6} = \frac{70}{84}$, $\frac{6}{7} = \frac{72}{84}$, то при $n = 84$ единственное число k , удовлетворяющее неравенству, это $k = 71$. При $n > 84$ на интервал $\left(\frac{5}{6}; \frac{6}{7}\right)$ длины $\frac{1}{42}$ целиком помещаются два отрезка длины $\frac{1}{n}$, поэтому если число $\frac{k-1}{n}$ — наибольшее число указанного вида, которое не больше $\frac{5}{6}$, то и число $\frac{k}{n}$, и число $\frac{k+1}{n}$ лежат в указанном интервале, значит, есть не менее двух чисел k удовлетворяющих неравенству из условия.

Ответ: 84.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано что при $n > 84$ существует более одного k , удовлетворяющих неравенству из условия	4 балла
Доказано, что $n = 84$ удовлетворяет условию задачи	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

9.6. На разных сторонах прямого угла с вершиной O отметили точки A и B так, что $AO = OB$. Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри угла AOB и таких, из которых отрезки OA и OB видны под одинаковыми углами.



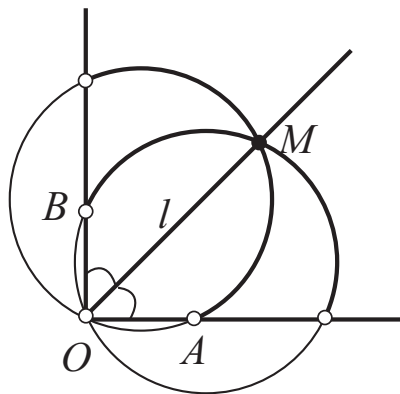
К решению задачи 9.6, ГМТ, откуда отрезок виден под заданным углом

Решение: Пусть точка M принадлежит требуемому ГМТ. Тогда $\angle AMO = \angle BMO = \alpha$. Рассмотрим четырёхугольник (возможно, невыпуклый) $AMBO$. Сумма его углов равна 360° , $\angle O = 90^\circ$, $\angle M = 2\alpha$. Отсюда $\alpha < 135^\circ$.

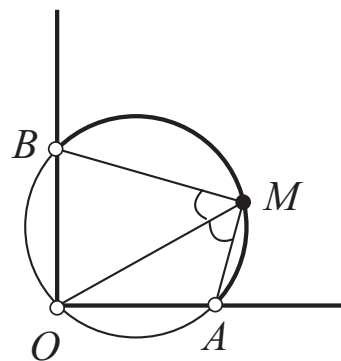
Геометрическим местом точек, из которых отрезок AO виден под углом α , является объединение двух равных дуг (без концов) окружностей — см. рисунок. Точка M находится на той дуге, которая лежит в полуплоскости с границей OA , содержащей точку B . Аналогично, точка M лежит на дуге окружности, из которой отрезок OB виден под тем же углом α и которая лежит в полуплоскости с границей OB , содержащей точку A .

Рассмотрим окружности, содержащие эти дуги. Возможно два случая.

1) Окружности различны. Тогда они симметричны относительно прямой l — биссектрисы угла AOB и имеют общую точку O . Вторая точка их пересечения также лежит на l . Следовательно, M лежит на биссектрисе угла AOB (см. рисунок слева). Отметим, что все точки биссектрисы входят в ГМТ: если $M \in l$, то треугольники MOA и MOB равны по двум сторонам и углу между ними.



К решению задачи 9.6, случай 1

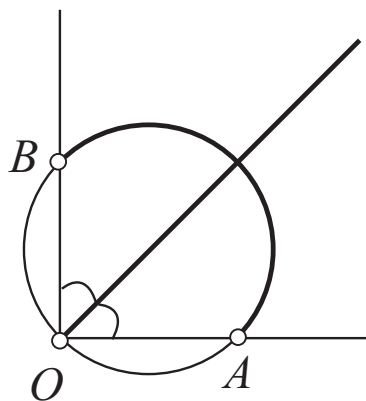


К решению задачи 9.6, случай 2

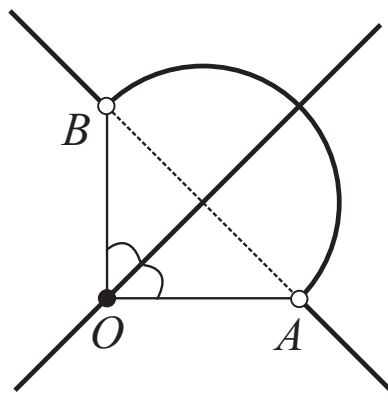
2) Окружности совпадают. Тогда эта общая окружность описана около треугольника AOB . Интересующие нас дуги имеют общую часть — дугу AB . Значит, точка M лежит на этой дуге. (см. рисунок справа). Все точки дуги (исключая их концы) входят в указанное множество: дуги OA и OB равны, так как стягиваются равными хордами, значит, для любой точки M дуги AB выполнено равенство $\angle AMO = \angle BMO$.

Мы доказали, что искомым геометрическим местом точек является объединение биссектрисы угла AOB и лежащей внутри угла дуги окружности, описанной около треугольника AOB — см. рисунок ниже слева. Это ответ.

Ответ:



Ответ к задаче 9.6



К примечанию к задаче 9.6

Примечание: Не очень сложно найти ГМТ всех точек плоскости, не обязательно лежащими внутри угла AOB , из которых отрезки AO и OB видны под равными углами. В этом случае множество будет иметь вид, изображённый на рисунке выше справа.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верно найдено требуемое ГМТ всех точек плоскости (не только лежащих внутри угла AOB)	баллы не снижаются
Обосновано, что искомое ГМТ лежит в объединении биссектрисы угла AOB и окружности с диаметром AB и доказан хотя бы один из фактов а) или б) критерия на 4 балла	6 баллов
Обосновано, что искомое ГМТ лежит в объединении биссектрисы угла AOB и окружности с диаметром AB	5 баллов
Доказано два факта: а) точки биссектрисы угла входят в нужное ГМТ б) точки полуокружности с диаметром AB входят в нужное ГМТ	4 балла
Доказан факт б) из критерия на 4 балла	3 балла
Доказан факт а) из критерия на 4 балла	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов