

9 класс

1. На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата?

Ответ: 18.

Решение. Пусть числа на противоположных сторонах квадрата равны a и c , а на других двух противоположных сторонах — b и d . Тогда числа в вершинах квадрата (произведения чисел на смежных сторонах) равны ab , bc , cd и da . Их сумма:

$$ab + bc + cd + da = a(b + d) + c(b + d) = (a + c)(b + d) = 77.$$

Все рассматриваемые числа — натуральные, поэтому значение каждой из скобок не меньше двух. Число 77 можно разложить на два множителя, каждый из которых не меньше двух, единственным образом: $77 = 7 \times 11$. Значит, $a + c$ и $b + d$ равны 7 и 11 (в каком-то порядке), поэтому сумма всех чисел на сторонах квадрата равна $a + b + c + d = (a + c) + (b + d) = 7 + 11 = 18$.

Критерии. Правильный ответ найден подбором — 1 балл. Преобразование суммы чисел в вершинах к виду $(a + c)(b + d) = 77$ — ещё 2 балла. Доказано, что $a + c$ и $b + d$ — делители числа 77 — ещё 2 балла. Установлено, что $a + c$ и $b + d$ равны 7 или 11 — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \dots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \dots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет наибольшей, и укажите её значение.

Ответ: наибольшая сумма 483.

Решение. Рассмотрим девятизначное число $\overline{d_1 d_2 \dots d_9}$, составленное из всех цифр от 1 до 9 без повторений. Сумма всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами, равна

$$S = \overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_3} + \dots + \overline{d_8 d_9}.$$

Заметим, что в этой сумме каждая цифра, кроме первой и последней, участвует дважды: один раз в разряде десятков, другой — в разряде единиц. Поэтому

$$S = 10d_1 + 11(d_2 + d_3 + \dots + d_8) + d_9.$$

Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45, поэтому $d_1 + d_2 + \dots + d_9 = 45$, и значит, $d_2 + d_3 + \dots + d_8 = 45 - d_1 - d_9$. Подставив в выражение для S , получим $S = 10d_1 + 11(45 - d_1 - d_9) + d_9 = 495 - d_1 - 10d_9$.

Таким образом, сумма S зависит только от первой и последней цифр числа. Сумма S будет наибольшей, когда число $10d_9 + d_1 = \overline{d_9 d_1}$ наименьшее. Поскольку цифры различны, наименьшее значение $\overline{d_9 d_1}$ равно 12, то есть цифры d_9 и d_1 равны соответственно 1 и 2, при этом $S = 495 - 2 - 10 \cdot 1 = 483$. Итак, максимальная сумма $S = 483$ достигается для любого девятизначного числа, которое начинается с цифры 2 и заканчивается цифрой 1. Остальные цифры могут располагаться в произвольном порядке.

Пример такого числа: 234567891.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Выражение для S записано в виде $10d_1 + 11(d_2 + \dots + d_8) + d_9$ без дальнейшего продвижения — 1 балл. Получено выражение $S = 495 - d_1 - 10d_9$, но минимизация

не проведена или проведена с ошибками — 2 балла. Указано, что сумма S будет наибольшей, когда бóльшие цифры входят в неё с бóльшими коэффициентами, но минимизация не проведена или проведена с ошибками — 3 балла. Проведена минимизация $d_1 + 10d_9$, но выбраны недопустимые цифры (например, $d_1 = 1$ и $d_9 = 1$) — 4 балла. Правильно найдены $d_1 = 2$ и $d_9 = 1$, но не указано, что любое число с такими крайними цифрами даёт максимум, или есть мелкие недочёты в объяснении — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 400?

Ответ: 2014.

Решение. Обозначим первые три числа через x , y и z . Тогда следующие числа равны:

$$a_4 = \frac{x+y+z}{3}, \quad a_5 = \frac{x+4y+4z}{9}, \quad a_6 = \frac{4x+7y+16z}{27}, \quad a_7 = \frac{16x+28y+37z}{81}.$$

По условию $a_7 = 400$, поэтому $16x + 28y + 37z = 32\,400$. Заметим, что $16x$ и $28y$ делятся на 4, и $32\,400$ также делится на 4. Значит, $37z$ делится на 4. Так как 37 и 4 взаимно просты, то z делится на 4. В частности, $z \geq 4$. Поскольку $y \geq 1$, $z \geq 4$ и $16x = 32\,400 - 28y - 37z$, получаем

$$16x \leq 32\,400 - 28 \cdot 1 - 37 \cdot 4 = 32\,224, \quad \text{откуда} \quad x \leq 2014.$$

Покажем, что значение $x = 2014$ достигается. Пусть $x = 2014$, $y = 1$ и $z = 4$, тогда следующие четыре числа равны $a_4 = 673$, $a_5 = 226$, $a_6 = 301$ и $a_7 = 400$. Все числа натуральные. Следовательно, максимальное значение первого числа равно 2014.

Критерии. Получено уравнение $16x + 28y + 37z = 32\,400$ — 1 балл. Доказано, что z делится на 4 — 2 балла. Получена оценка $x \leq 2014$ — 2 балла. Приведён пример с $x = 2014$ и проверено, что все числа натуральные — 2 балла. Баллы суммируются. Полное решение — 7 баллов.

4. На вечеринке собрались 10 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

Ответ: 20 троек.

Решение. Рассмотрим граф из 10 вершин, соответствующих гостям вечеринки. Две вершины графа соединим красным отрезком, если соответствующие им люди знакомы друг с другом, и синим отрезком, если не знакомы. Докажем, что общее число красных и синих треугольников не менее 20.

Обозначим через E , F и G — количество красных, синих и *неполных* треугольников, содержащих рёбра обоих цветов (такие тройки не являются ни дружескими, ни незнакомыми). Тогда общее число треугольников в графе равно

$$E + F + G = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120. \quad (1)$$

Пронумеруем всех гостей от 1 до 10, и пусть d_i — количество знакомых i -го человека, тогда количество незнакомых с ним будет $9 - d_i$. Для каждого гостя i выберем одного знакомого с ним человека j — это можно сделать d_i способами, а также одного незнакомого с ним человека k — это можно сделать $(9 - d_i)$ способами. Полученная тройка ijk образует *неполный* треугольник. Таким образом, для каждого гостя получается $d_i(9 - d_i)$ неполных треугольников. Заметим, что каждый неполный треугольник при таком способе подсчёта учитывается дважды — для каждой из двух вершин треугольника ijk , из которых исходят разноцветные рёбра. (Если отрезок jk синий, то треугольник ijk учитывается также при подсчёте неполных треугольников, связанных с j -м человеком. Если же отрезок jk красный, то треугольник ijk учитывается при подсчёте неполных треугольников, связанных

с k -м человеком.) Следовательно,

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} d_i(9 - d_i).$$

Оценим выражение $x(9 - x) = \frac{81}{4} - (x - \frac{9}{2})^2 \leq \frac{81}{4}$. Поскольку x — целое, каждое слагаемое суммы не больше 20, и значит, $G \leq \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20$, то есть $G \leq 100$. Отсюда и из равенства (1) следует, что $E + F = 120 - G \geq 20$ (оценка).

Приведём ПРИМЕР, подтверждающий точность этой оценки.

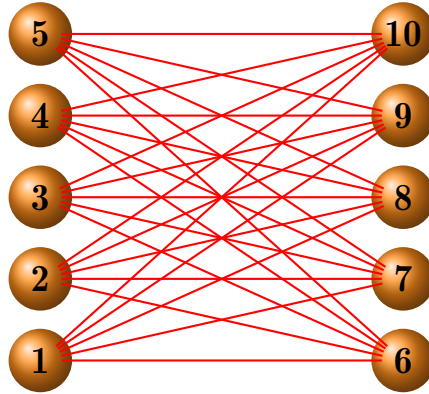


Рис. 2

На рисунке 2 изображён граф знакомств, в котором гости разбиты на две группы: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ (полный двудольный граф $K_{5,5}$). Все рёбра между вершинами из разных групп — красные (знакомства), а внутри групп — синие (незнакомства). Тогда красных треугольников нет, $E = 0$, а синие треугольники образуются внутри каждой группы, $F = C_5^3 + C_5^3 = 20$, и значит, $E + F = 20$.

Замечание. Эта задача является продолжением (и обобщением) известной задачи, в которой требуется доказать, что в компании из 6 человек всегда найдутся трое, попарно знакомых между собой, или трое, попарно не знакомых.

Критерии. Записано соотношение $E + F + G = C_{10}^3 = 120$ — 1 балл. Доказано, что число неполных треугольников графа знакомств равно $\frac{1}{2} \sum d_i(9 - d_i) - 3$ балла. Доказано, что число неполных треугольников $d_i(9 - d_i) \leq 20$ для каждой вершины — 4 балла. Доказано, что число дружеских и незнакомых троек не меньше 20 — 5 баллов (оценка). Правильно указана конструкция примера — ещё 2 балла. Сказано, что оценка достигается на полном двудольном графе, но не подсчитано число троек — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружность с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках V и P соответственно. Прямая OH перпендикулярна BC и пересекается с PB в точке K . Докажите, что AK делит отрезок BC пополам.

Решение. (Рис. 3.) Через точку K проведём прямую LM , параллельную BC так, что точка L лежит на AC , а M — на AB . Получающиеся четырёхугольники $OLPK$ и $OKMB$ — вписанные. Действительно, у первого из них есть прямые углы OKL и OPL , а у второго — прямые углы OKM и OBM .

Из того, что четырёхугольник $OLPK$ — вписанный, получаем равенство углов OLK и OPK . Аналогично, рассматривая четырёхугольник $OKMB$, получаем равенство $\angle OKM = \angle OBK$. Кроме того, треугольник OBP — равнобедренный ($OB = OP$), откуда $\angle OPK = \angle OBK$.

Запишем цепочку равенств

$$\angle OLK = \angle OPK = \angle OBK = \angle OKM,$$

из которой следует, что треугольник OLM — равнобедренный. Следовательно, перпендикуляр OK делит сторону LM пополам и для треугольника ALM прямая AK является медианой. Из подобия треугольников ALM и ACB ($LM \parallel CB$) получаем, что прямая AK является медианой и для треугольника ACB и делит CB пополам.

Критерии. Построена прямая LM через точку K параллельно BC — 1 балл. Доказано, что четырёхугольник $OLPK$ (или $OKMB$) — вписанный — 2 балла. Доказано равенство углов OLK , OPK , OBK и OMK — 3 балла. Доказано равенство $\angle OLK = \angle OMK$ и сделан вывод, что треугольник OLM — равнобедренный, — 4 баллов. Установлено, что K — середина LM (или OK — медиана к LM) — 5 баллов. Указано, что в треугольнике ALM прямая AK — медиана — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

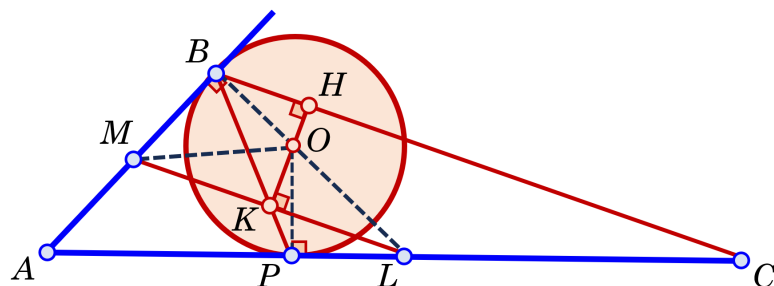


Рис. 3