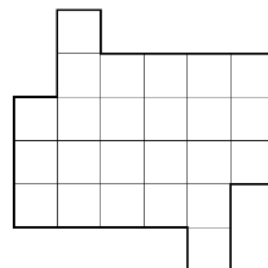


КЛЮЧИ

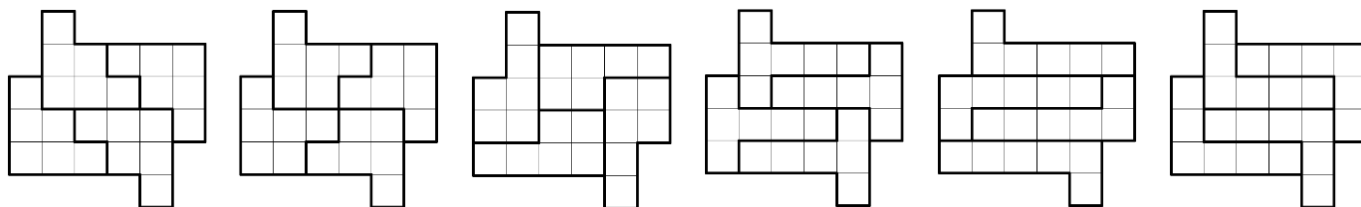
Время выполнения заданий – 235 мин.

Максимальное количество первичных баллов – 35, итоговых – 100.

1. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на 4 равных части. Найдите не меньше трёх способов разрезания (фигуры, полученные при разных способах, должны быть разными). Две фигуры считаются равными, если одну из них можно повернуть и/или перевернуть так, что при наложении она совпадёт со второй.



Решение. См. рисунок.



Критерии.

Найдены три или больше способов – 7 баллов.

Найден один способ – 3 балла.

Найдено два способа – 5 баллов.

2. На доске написано натуральное трёхзначное число. Андрей выполняет с написанным на доске числом одно из трёх действий: увеличивает его на 25%, или увеличивает его на 60%, или уменьшает его на 60% (получившееся число уже не обязано быть натуральным). После этого результат действия записывается на доску, а предыдущее число стирается. С новым числом также выполняется одно из трёх действий и т. д. Могло ли после нескольких таких действий первоначальное число увеличиться на 2025?

Ответ: да, могло.

Решение. Обозначим исходное число через A . Если на доске в какой-то момент находится число a и оно увеличивается на 25%, то получится число $\left(1 + \frac{25}{100}\right)a = \frac{5}{4}a$; если оно увеличивается на 60%, то получится число $\left(1 + \frac{60}{100}\right)a = \frac{8}{5}a$; если оно уменьшается на 60%, то получится число $\left(1 - \frac{60}{100}\right)a = \frac{2}{5}a$. Заметим, что если выполнить с числом первое и второе действия (в любом порядке), то число увеличится в 2 раза. Если выполняется n пар таких действий, то исходное число увеличится в 2^n раз. Будем искать решение именно в таком виде. Тогда получим уравнение

$$2^n \cdot A = A + 2025,$$

что равносильно $(2^n - 1)A = 2025$. Тогда $2^n - 1$ является делителем числа $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, большим, чем 1, так как число A – трёхзначное.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
9 класс**

При $n = 2$ получаем $2^n - 1 = 3$, $A = 2025: 3 = 675$. При этом с числом 675 нужно выполнить два раза увеличение на 25% и два раза увеличение на 60%.

При $n = 4$ получаем $2^n - 1 = 15$, $A = 2025: 15 = 135$. При этом с числом 135 нужно выполнить 4 раза увеличение на 25% и 4 раза увеличение на 60%.

Замечание. Кроме двух приведённых вариантов также подходят числа 225 (нужно выполнить 4 раза увеличение на 25% и 3 раза увеличение на 60%) и 375 (нужно выполнить 2 раза увеличение на 25% и 3 раза увеличение на 60%).

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ (один из четырёх вариантов с упоминанием того, какие ходы приводят к нужному результату) – 7 баллов.

Приведено в качестве примера только четырёхзначное или пятизначное число (2025, 3375, 3600, 8100, 84375 и т.д.) – 0 баллов.

Только верный пример без упоминания того, какие ходы приводят к нужному результату – 0 баллов.

Замечание. Набор ходов, приводящий к одному и тому же результату, может быть разным.

3. Для трёх действительных чисел a , b и c известно, что $a + b = \frac{a}{1-c}$, $b + c = \frac{b}{1-a}$ и $c + a = \frac{c}{1-b}$. Какие значения может принимать выражение $(a + b)(b + c)(c + a)$? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 0 или 1.

Решение. Предположим, что одна из неизвестных, например, a , равна нулю. Тогда из первого равенства следует, что $b = 0$, а из второго – что $c = 0$. Тогда $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$. Аналогично и для случаев, когда $b = 0$ или $c = 0$.

Пусть теперь все три неизвестные ненулевые. Умножив обе части первого равенства на $1 - c$, получим $a + b - ac - bc = a$. Следовательно, $c(a + b) = b$, откуда имеем $a + b = \frac{b}{c}$. Аналогично из двух других равенств получаем $b + c = \frac{c}{a}$, $c + a = \frac{a}{b}$. Перемножая три последних равенства, имеем

$$(a + b)(b + c)(c + a) = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

Это равенство реализуется, например, когда $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ (с примерами реализации каждого из двух равенств) – 7 баллов.

Рассмотрен только случай, когда одна из неизвестных равна нулю – 1 балл.

Рассмотрен случай только с ненулевыми неизвестными (без примера) – 4 балла.

Рассмотрен случай только с ненулевыми неизвестными (с примером) – 5 баллов.

Рассмотрены оба случая, но без примера для второго случая – 6 баллов.

Получен один из двух вариантов ответа для какого-то одного набора конкретных чисел, удовлетворяющих условию задачи, например, когда $a = b = c = 0$ или $a = b = c = \frac{1}{2}$, без обоснования отсутствия других вариантов – 0 баллов.

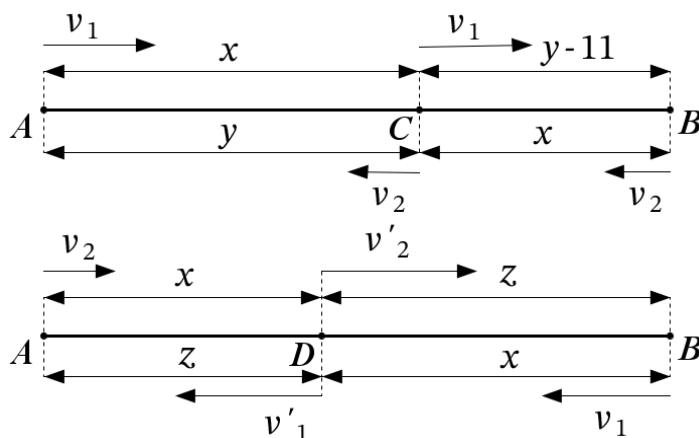
**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
9 класс**

Получены оба варианта ответа для двух наборов конкретных чисел, удовлетворяющих условию задачи, например, когда $a = b = c = 0$ и $a = b = c = \frac{1}{2}$, без обоснования отсутствия других вариантов – 2 балла.

4. Из городов Андреевск и Борисовск, соединённых прямой дорогой, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и проехали с неизменными скоростями весь путь между городами, причём первый автомобиль прибыл в Борисовск на 11 минут раньше, чем второй в Андреевск. На следующий день они одновременно выехали обратно и ехали с прежними скоростями до момента встречи. В момент встречи первый автомобиль, ехавший в Андреевск, увеличил свою скорость на 25%, а второй автомобиль увеличил свою скорость на 80%, после чего они продолжили ехать с новыми скоростями остаток пути между городами и въехали в пункты назначения одновременно. Найдите, через сколько минут после начала движения на обратном пути автомобили встретились.

Ответ: через 30 минут.

Решение. Изобразим весь путь в виде отрезка AB , где точка A обозначает Алексеевск, а B – Борисовск. Пусть C и D – точки встречи автомобилей на пути туда и обратно соответственно. Обозначим первоначальные скорости (в км/мин) первой и второго автомобилей через v_1 и v_2 соответственно, тогда после момента их второй встречи их скорости будут равны $v'_1 = \left(1 + \frac{25}{100}\right)v_1$ и $v'_2 = \left(1 + \frac{80}{100}\right)v_2$ соответственно, то есть $v'_1 = \frac{5}{4}v_1$ и $v'_2 = \frac{9}{5}v_2$. Обозначим через x , y и z время (в минутах), затраченное автомобилями на путь



до места встречи; время (в минутах), затраченное вторым автомобилем на остаток пути после момента первой встречи, и время (в минутах), затраченное автомобилями на остаток пути после момента второй встречи, соответственно. Тогда время (в минутах), затраченное первым автомобилем на остаток пути после момента первой встречи, равно $y - 11$. Заметим, что на одном и том же участке пути отношение скоростей автомобилей равно обратному отношению затраченного времени. На участке AC отношение скоростей первого и второго автомобилей $\frac{v_1}{v_2}$ равно обратному отношению затраченного ими времени $\frac{y}{x}$; на участке BC отношение скоростей первого и второго автомобилей $\frac{v_1}{v_2}$ равно обратному отношению затраченного ими времени $\frac{x}{y-11}$. Таким образом, имеем двойное равенство:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{y}{x} = \frac{x}{y-11}. \quad (1)$$

На участке AD отношение скоростей первого и второго автомобилей $\frac{v'_1}{v'_2}$ равно обратному отношению затраченного ими времени $\frac{x}{z}$; на участке BD отношение скоростей первого и второго автомобилей $\frac{v'_1}{v'_2}$ равно обратному отношению затраченного ими времени $\frac{z}{x}$. Таким образом, имеем два равенства:

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
9 класс**

$\frac{5v_1}{4v_2} = \frac{x}{z}$ и $\frac{v_1}{\frac{9}{5}v_2} = \frac{z}{x}$, то есть $\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{x}{z}$ и $\frac{v_1}{v_2} = \frac{9}{5} \cdot \frac{z}{x}$. Следовательно, $\frac{4}{5} \cdot \frac{x}{z} = \frac{9}{5} \cdot \frac{z}{x}$, что равносильно $\left(\frac{x}{z}\right)^2 = \frac{9}{4}$, таким образом, $\frac{x}{z} = \frac{3}{2}$. Тогда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$. Подставив вместо $\frac{v_1}{v_2}$ дробь $\frac{6}{5}$ в равенство (1), получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{6}{5}, \\ \frac{x}{y-11} = \frac{6}{5}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $y = \frac{6}{5}x$. Подставив во второе уравнение системы, получим $\frac{x}{\frac{6}{5}x-11} = \frac{6}{5}$, что равносильно $\frac{5x}{6x-55} = \frac{6}{5}$. Сделав перекрёстное умножение, имеем равенство $36x - 330 = 25x$, следовательно, $x = 30$.

Критерии.

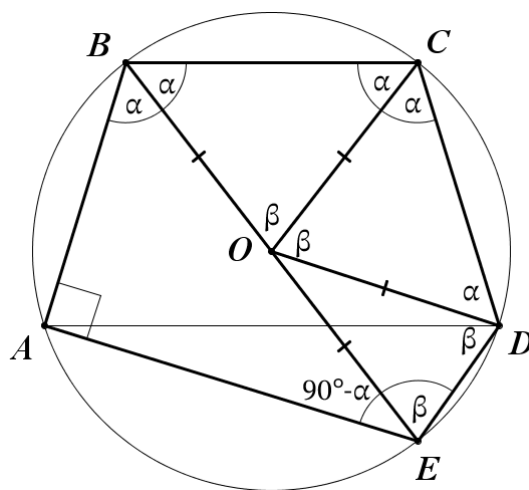
Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Ход решения и все используемые формулы верны, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 5-6 баллов.

5. Около равнобедренной трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC описана окружность с центром в точке O . Точка E диаметрально противоположна точке B , причём $\angle AED = \angle ABC$ и $DE \parallel OC$. Найдите угол AED .

Ответ: 108° .

Решение. Точка E лежит на дуге AD . Действительно, если это не так, то $\angle AED = \angle ABD < \angle ABC$. Пусть $\angle EBC = \alpha$, $\angle BED = \beta$. Точка O лежит на отрезке BE . Так как OB , OC , OD и OE – радиусы, то треугольники BOC , COD и DOE – равнобедренные, следовательно, $\angle OCB = \angle OBC = \alpha$, $\angle OCD = \angle ODC$ и $\angle ODE = \angle OED = \beta$. Поскольку $DE \parallel OC$, то углы COD и ODE равны как накрест лежащие, а углы BOC и OED равны как соответственные, следовательно, $\angle BOC = \angle COD = \beta$. Отсюда следует, что треугольники BOC и DOC равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $\angle OCD = \angle OCB = \angle OBC = \angle ODC = \alpha$. Так как трапеция равнобедренная, то $\angle ABC = \angle BCD = 2\alpha$, следовательно, $\angle ABE = \alpha$. Поскольку BE – диаметр, то $\angle BAE = 90^\circ$, следовательно, $\angle AEB = 90^\circ - \angle ABE = 90^\circ - \alpha$. Приравнявая углы $\angle AED$ и $\angle ABC$, получаем равенство $90^\circ - \alpha + \beta = 2\alpha$, а рассматривая треугольник COD и сумму его углов, получаем равенство $2\alpha + \beta = 180^\circ$. Решая систему из последних двух уравнений, получаем $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ и $90^\circ - \alpha + (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$, откуда имеем $5\alpha = 270^\circ$, то есть $\alpha = 54^\circ$, следовательно, $\angle AED = 2\alpha = 108^\circ$.



**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
9 класс**

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ (за отсутствие обоснования расположения точки E оценка не снижается) – 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Доказано равенство треугольников BOC и DOC – 2 балла.

Доказано равенство углов $\angle ABO$ и $\angle CBO$ – 1 балл.

Доказано, что $\angle AEB = 90^\circ - \angle OBC$ – 1 балл.

Баллы за три предыдущих пункта суммируются.

Верно составлена система двух уравнений с двумя неизвестными, но неверно решена – 5-6 баллов.
