

Условия и решения задач

9.1 На доске в ряд выписаны 2025 чисел, причем каждое число, кроме двух крайних, равно сумме двух соседних с ним чисел. Известно, что сумма первых ста чисел в этом ряду равна нулю, а сумма первых двухсот чисел в этом ряду равна трём. Найдите сумму всех чисел в этом ряду.

Ответ: 2.

Решение. Пусть первое число равно x , а второе — y . Тогда последовательность имеет вид:

$$x, y, y - x, -x, -y, x - y, x, y, \dots$$

Видно, что числа повторяются с периодом 6, причём сумма любых шести подряд идущих чисел равна 0.

Обозначим S_n — сумму первых n чисел последовательности.

Число 100 при делении на 6 даёт остаток 4, поэтому

$$S_{100} = S_4 = x + y + (y - x) + (-x) = 2y - x = 0.$$

Число 200 даёт остаток 2:

$$S_{200} = S_2 = x + y = 3.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2y - x = 0, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

получаем $x = 2$, $y = 1$.

Так как число 2025 при делении на 6 даёт остаток 3, то

$$S_{2025} = S_3 = x + y + (y - x) = 2y = 2.$$

□

9.2 Даша из дома в школу всегда идет с постоянной скоростью, а из школы домой увеличивает скорость на одну и ту же величину, после того, как пройдет очередную треть пути, при этом ее скорость на второй трети пути совпадает со скоростью, с которой она идет в школу. Куда дорога занимает меньше времени из дома в школу или из школы домой?

Ответ: в школу.

Решение. Обозначим через S длину трети пути, через v — скорость Даши по дороге из дома в школу, а через a — величину, на которую она увеличивает свою скорость по дороге из школы к дому. Тогда на дорогу в школу она тратит Даша тратит $\frac{3S}{v}$, а на дорогу из школы

$$\frac{S}{v-a} + \frac{S}{v} + \frac{S}{v+a}$$

Следовательно, требуется сравнить $\frac{2S}{v}$ и $\frac{S}{v-a} + \frac{S}{v+a}$. Рассмотрим разность

$$\frac{S}{v-a} + \frac{S}{v+a} - \frac{2S}{v} = \left(\frac{S}{v-a} - \frac{S}{v} \right) + \left(\frac{S}{v+a} - \frac{S}{v} \right) = \frac{Sa}{(v-a)v} - \frac{Sa}{(v+a)v} > 0,$$

поскольку первая дробь больше второй. Таким образом Даша тратит больше времени на дорогу из школы. □

9.3 Про некоторую компанию людей известно, что любые два человека, у которых одинаковое количество друзей в этой компании, не имеют общих друзей. Докажите, что в этой компании найдётся человек, у которого ровно один друг. (Предполагается, что по крайней мере одна пара друзей в этой компании имеется).

Решение. Рассмотрим человека M с наибольшим числом друзей, пусть их у него n . Каждый из них имеет не более n друзей. С другой стороны все они имеют общего друга M , поэтому число друзей у всех них различно. Таким образом, среди них будет по одному человеку с $1, 2, \dots, n$ друзьями. $\square$

9.4 Прямая $y = ax + b$ называется хорошей, если она имеет ровно одну общую точку с параболой $y = x^2 + ax + b$. Можно ли подобрать два различных числа p и q так, чтобы и прямая $y = px + q$, и прямая $y = qx + p$ были хорошими?

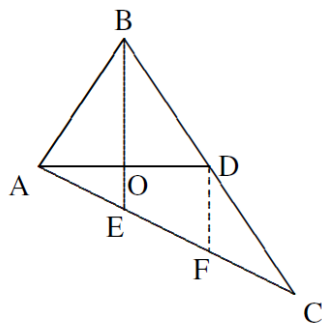
Ответ: нет.

Решение. Чтобы прямая $y = px + q$ имела одну общую точку с параболой $y = x^2 + qx + p$ уравнение $px + q = x^2 + qx + p$ должно иметь единственное решение, т.е. у квадратного уравнения $x^2 + (q - p)x + (p - q) = 0$ дискриминант $D = (q - p)^2 - 4(p - q) = (p - q)(p - q - 4) = 0$. Меняя местами p и q , получим уравнение $x^2 + (p - q)x + (q - p) = 0$, дискриминант которого $D = (q - p)(q - p - 4) = 0$. Если у обоих уравнений дискриминанты равны нулю, то $p = q$. $\square$

9.5 В треугольнике ABC проведены биссектриса BE и медиана AD , пересекающиеся под прямым углом. Известно, что $BE = AD = 4$. Найдите длины сторон треугольника ABC .

Ответ: $AB = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$.

Решение.



Пусть AD и BE пересекаются в точке O . Так как в треугольнике ABD биссектриса BO перпендикулярна стороне AD , то треугольник ABD — равнобедренный и $AO = OD = 2$.

Проведём DF параллельно BE . Так как D — середина BC , то DF — средняя линия треугольника BEC . Тогда $EF = FC$, $DF = \frac{1}{2}BE = 2$.

Отрезок OE — средняя линия треугольника ADF , поэтому $AE = EF$ и $OE = \frac{1}{2}DF = 1$. Значит $BO = BE - OE = 3$, $BO = 3$.

По теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13};$$

$$BC = 2 \cdot BD = 2 \cdot AB = 2\sqrt{13}.$$

$$AE = \sqrt{AO^2 + OE^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad AC = 3AE = 3\sqrt{5};$$

$\square$

Комментарий. Доказано, что $AO = OD = 2$ — 1 балл.