

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

9 класс

1.Задание: Доказать, что на множестве целых чисел уравнение $x^4 + 4x - 1 = 0$ не имеет корней.

Решение:

1 способ.

Для доказательства того, что уравнение $x^4 + 4x - 1 = 0$ не имеет корней на множестве целых чисел, рассмотрим возможные значения x и проверим, удовлетворяет ли уравнение целочисленным значениям.

Рассмотрим случай $x=0$:

$$x^4 + 4x - 1 = 0^4 + 4 \cdot 0 - 1 = -1 \neq 0$$

Значит, $x=0$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим случай $x=1$

$$x^4 + 4x - 1 = 1^4 + 4 \cdot 1 - 1 = 1 + 4 - 1 = 4 \neq 0$$

Значит, $x=1$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим случай $x=-1$

$$x^4 + 4x - 1 = (-1)^4 + 4 \cdot (-1) - 1 = 1 - 4 - 1 = -4 \neq 0$$

Значит, $x=-1$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим случай $x=2$:

$$x^4 + 4x - 1 = 2^4 + 4 \cdot 2 - 1 = 16 + 8 - 1 = 23 \neq 0$$

Значит, $x=2$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим случай $x=-2$:

$$x^4 + 4x - 1 = (-2)^4 + 4 \cdot (-2) - 1 = 16 - 8 - 1 = 7 \neq 0$$

Значит, $x=-2$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим случай $x=3$:

$$x^4 + 4x - 1 = 3^4 + 4 \cdot 3 - 1 = 81 + 12 - 1 = 92 \neq 0$$

Значит, $x=3$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим случай $x=-3$:

$$x^4 + 4x - 1 = (-3)^4 + 4 \cdot (-3) - 1 = 81 - 12 - 1 = 68 \neq 0$$

Значит, $x=-3$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим случай $x=4$:

$$x^4 + 4x - 1 = 4^4 + 4 \cdot 4 - 1 = 256 + 16 - 1 = 271 \neq 0$$

Значит, $x=4$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим случай $x=-4$:

$$x^4 + 4x - 1 = (-4)^4 + 4 \cdot (-4) - 1 = 256 - 16 - 1 = 239 \neq 0$$

Значит, $x=-4$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим случай $x \geq 5$ или $x \leq -5$:

Заметим, что для $x \geq 5$: x^4 растет быстрее, чем $4x-1$, поэтому $x^4 + 4x - 1 > 0$

Для $x \leq -5$: x^4 также растет быстрее, чем $4x-1$, и x^4 всегда положительно, а $4x-1$ отрицательно, но x^4 будет значительно больше по модулю, чем $4x-1$, поэтому $x^4 + 4x - 1 > 0$.

Таким образом, для всех целых чисел x уравнение $x^4 + 4x - 1 = 0$ не имеет корней на множестве целых чисел.

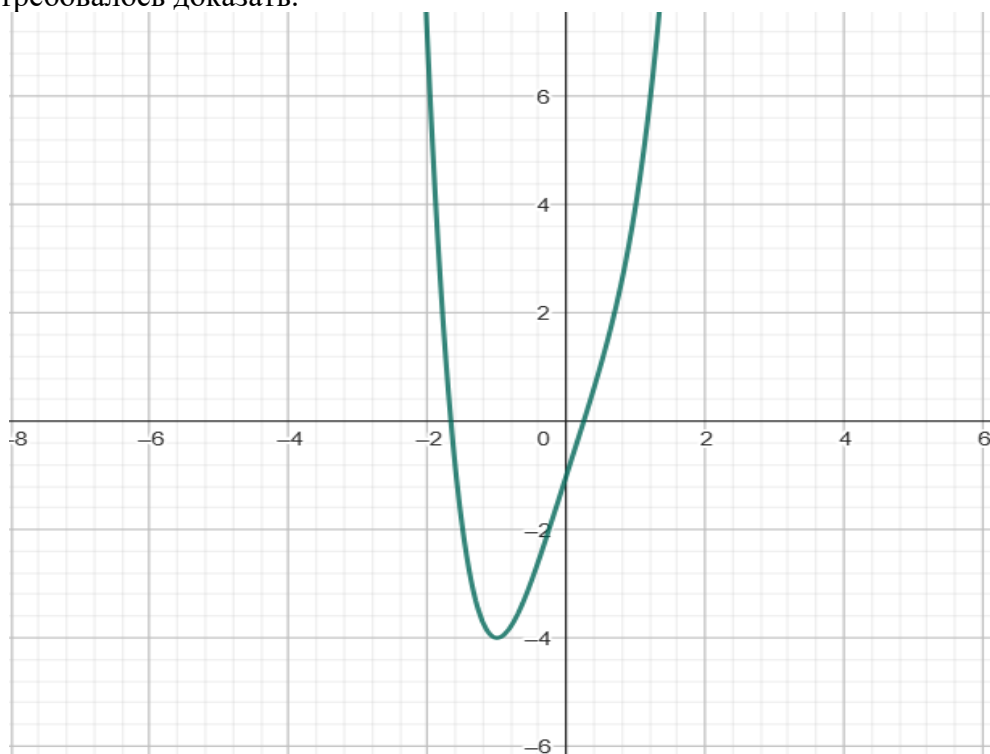
Ответ: уравнение $x^4 + 4x - 1 = 0$ не имеет корней на множестве целых чисел.

2 способ.

Построим график функции $y = x^4 + 4x - 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	68	7	-4	-1	4	23	92

По графику видно, что в точках пересечения графика функции с осью X не целочисленное значение, значит искомое уравнение не имеет целочисленных корней. Что и требовалось доказать.



Ответ: уравнение $x^4 + 4x - 1 = 0$ не имеет корней на множестве целых чисел.

3 способ

Так как речь уравнение рассматривается на множестве целых чисел, то будем искать целочисленные решения.

Представим левую часть в виде произведения двух приведенных квадратных многочленов с целыми коэффициентами:

$$x^4 + 4x - 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$$\begin{aligned}(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) &= x^4 + ax^3 + bx^2 + cx^3 + acx^2 + bcx + dx^2 + adx + bd \\ &= x^4 + x^3(a + c) + x^2(b + ac + d) + x(bc + ad) + bd\end{aligned}$$

Таким образом получаем равенство

$$x^4 - 4x - 1 = x^4 + x^3(a + c) + x^2(b + ac + d) + x(bc + ad) + bd$$

Сопоставим коэффициенты при соответствующих степенях неизвестных и получим систему уравнений

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + ac + d = 0 \\ bc + ad = 4 \\ bd = -1 \\ a = -c \\ b - c^2 + d = 0 \\ c(b - d) = 4 \\ bd = -1 \end{cases}$$

Из последнего уравнения сделаем предположение, что $b = 1, d = -1$.

Подставив эти значения, получим следующую систему

$$\begin{cases} a = -c \\ -c^2 = 0 \\ 2c = 4 \end{cases}$$

Полученная система действительных решений не имеет.

Значит, искомое уравнение не имеет корней. Что и требовалось доказать.

Ответ: уравнение $x^4 + 4x - 1 = 0$ не имеет корней на множестве целых чисел.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности.
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно ИЛИ имеются погрешности в применении символики и терминологии.
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3	Приведено доказательство, обоснованное некоторыми аргументами, но ясного обоснования доказательство не содержит.
2	Приведены идеи для доказательства или не доведены до конца.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

2 Задание: Доказать, что для любого прямоугольного треугольника имеет место неравенство $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$, где r – радиус вписанного круга, h – высота, опущенная на гипотенузу.

Решение:

Обозначим катеты треугольника через a и b , а гипотенузу – через c . $a > 0, b > 0, c > 0$

Площадь треугольника

$$S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r, \text{ или } S = \frac{hc}{2},$$

откуда

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}$$

Так как $a + b > c$, то

$$\frac{r}{h} < \frac{c}{c+c} = 0,5 \quad (*)$$

Теперь, сложив почленно очевидное неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$ с равенством $c^2 = a^2 + b^2$, получим:

$$(a^2 + b^2) + c^2 \geq (a + b)^2$$

или

$$2c^2 \geq (a + b)^2$$

откуда

$$a + b \leq c\sqrt{2}$$

Далее имеем

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} \geq \frac{c}{c\sqrt{2}+c} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41 > 0,4 \quad (**)$$

Ответ: Из (*) и (**) следует, что $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$. ч.т.д.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное, строго обоснованное решение (получено ключевое соотношение, доказана верхняя и нижняя оценка, сформулирован вывод). Все шаги логичны, доказаны, не пропущены ключевые моменты
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности, не влияющие на общую логику и итог (не проведена рационализация в вычислениях, незначительная описка и т.п.).
5	Ход решения верный, полностью и верно доказано одна из частей двойного неравенства, доказательство второй части не доведено до конца; или имеются погрешности в применении символики и терминологии
4	Ход решения верный, полностью и верно доказано одна из частей двойного неравенства, доказательства второй части нет, или найдены формулы, но доказательство обеих частей содержит существенные пробелы.
3	Получены верные формулы для r и h в прямоугольном треугольнике, сделан переход к выражению r/h через углы или стороны, но дальнейшее доказательство неравенства отсутствует или неверно.
2	Есть понимание, что такое r и h , записаны стандартные формулы для них, но не применены к частному случаю прямоугольного треугольника.
1	Представлены начальные размышления, рисунок, но нет значительного продвижения в решении. Верно записана хотя бы одна из формул, связанных с задачей
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

3 Задание: Пусть $0 < a < b < c < d$. Докажите, что многочлены $x^4 + bx + c$ и $x^4 + ax + d$ не имеют общих корней.

Решение:

Краткое решение. В силу положительности коэффициентов, многочлены $x^4 + bx + c$ и $x^4 + ax + d$ не имеют положительных корней. А поскольку их разность $(b - a)x + c - d$ – линейная функция, их графики пересекаются в одной точке. Так как разность отрицательна при $x=0$ и положительна при $x \rightarrow +\infty$, эта точка пересечения лежит правее оси ординат

1 способ. Так как все коэффициенты данных уравнений – положительные числа, то неотрицательных корней эти уравнения иметь не могут.

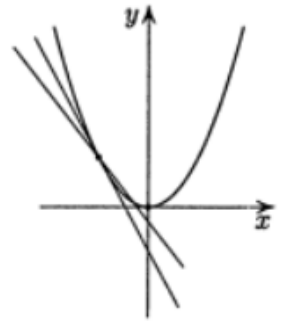
Пусть число x_0 является общим корнем данных уравнений, тогда $x_0^4 + bx_0 + c = 0$ и $x_0^4 + ax_0 + d = 0$ – верные числовые равенства.

Вычтем из одного равенства другое, тогда $(b - a)x_0 + c - d = 0$ – также верное числовое равенство.

Следовательно, $x_0 = \frac{d-c}{b-a} > 0$. Полученное противоречие показывает, что общих корней данные уравнения не имеют.

Ответ: Многочлены $x^4 + bx + c$ и $x^4 + ax + d$ не имеют общих корней.

2 способ. Используем графические соображения. Запишем данные уравнения в виде $x^4 = -bx - c$ и $x^4 = -ax - d$. Уравнения имеют общий корень тогда и только тогда, когда графики линейных функций $y = -bx - c$ и $y = -ax - d$ пересекают график функции $y = x^4$ в одной и той же точке. С одной стороны, так как все коэффициенты в формулах, задающих линейные функции, отрицательны, то эта точка должна лежать во II координатной четверти (см. рис.). С другой стороны, ее абсцисса является решением уравнения $-bx - c = -ax - d$, то есть $x = \frac{d-c}{b-a} > 0$. Получено противоречие.



Ответ: Многочлены x^4+bx+c и x^4+ax+d не имеют общих корней.

3 способ.

Для доказательства того, что многочлены x^4+bx+c и x^4+ax+d не имеют общих корней, предположим обратное: пусть r — общий корень этих многочленов. Тогда:

$$\begin{cases} r^4 + br + c = 0 \\ r^4 + ar + d = 0 \end{cases}$$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$(r^4 + br + c) - (r^4 + ar + d) = 0$$

$$br + c - ar - d = 0$$

$$(b-a)r + (c-d) = 0$$

$$(b-a)r = d - c$$

Так как $0 < a < b < c < d$, то $b-a > 0$ и $d-c > 0$. Следовательно, $(b-a)r = d-c$ означает, что $r = \frac{d-c}{b-a}$. Теперь проверим, удовлетворяет ли $r = \frac{d-c}{b-a}$ исходным уравнениям. Подставим r в первое уравнение:

$$(d - cb - a)^4 + b(d - cb - a) + c = 0$$

Упростим это выражение:

$$(d - cb - a)^4 + b(d - c)b - a + c = 0$$

$$(d - c)^4(b - a)^4 + b(d - c)b - a + c = 0$$

Умножим все члены уравнения на $(b-a)^4$:

$$(d - c)^4 + b(d - c)(b - a)^3 + c(b - a)^4 = 0$$

Теперь подставим r во второе уравнение:

$$(d - cb - a)^4 + a(d - cb - a) + d = 0$$

Упростим это выражение:

$$(d - cb - a)^4 + a(d - c)b - a + d = 0$$

$$(d - c)^4(b - a)^4 + a(d - c)b - a + d = 0$$

Умножим все члены уравнения на $(b-a)^4$:

$$(d - c)^4 + a(d - c)(b - a)^3 + d(b - a)^4 = 0$$

Теперь сравним два полученных уравнения:

$$(d - c)^4 + b(d - c)(b - a)^3 + c(b - a)^4 = 0$$

$$(d - c)^4 + a(d - c)(b - a)^3 + d(b - a)^4 = 0$$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$b(d - c)(b - a)^3 + c(b - a)^4 - a(d - c)(b - a)^3 - d(b - a)^4 = 0$$

$$(b - a)^3[b(d - c) + c(b - a) - a(d - c) - d(b - a)] = 0$$

$$(b - a)^3[bd - bc + bc - ac - ad + ac - d(b - a)] = 0$$

$$(b - a)^3[bd - ad - d(b - a)] = 0$$

$$(b - a)^3[bd - ad - db + da] = 0$$

$$(b - a)^3 \cdot 0 = 0$$

Это уравнение всегда верно, но не дает противоречия, если r действительно является общим корнем. Однако, если r является общим корнем, то r должно удовлетворять обоим

исходным уравнениям, что приводит к противоречию, так как $0 < a < b < c < d$ и многочлены $x^4 + bx + c$ и $x^4 + ax + d$ не могут иметь общего корня.

Ответ: Многочлены $x^4 + bx + c$ и $x^4 + ax + d$ не имеют общих корней.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности.
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно ИЛИ имеются погрешности в применении символики и терминологии.
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3	Приведено доказательство, обоснованное некоторыми аргументами, но ясного обоснования доказательство не содержит ИЛИ приведен конкретный пример многочленов и показано, что они не имеют общих корней.
2	Приведены идеи для доказательства или не доведены до конца.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

4 Задание: В разные места палки длиной 1 метр посадили N майских жуков. Каждый жук всегда бежит либо в одну, либо в другую сторону со скоростью 1 см/сек. Если два жука сталкиваются, то они отскакивают и бегут в противоположные стороны. Если жук добежит до конца палки, то он улетает. Какое максимально возможное число столкновений жуков может произойти?

1 способ

Пусть x майских жуков бежит в одну сторону, а $N-x$ в другую. Тогда каждый из x майских жуков встретит на своем пути $(N-x)$ жуков и общее число встреч (столкновений) равно $f(x) = x(N-x)$

$$f(x) = xN - x^2$$

Графиком функции $f(x)$ является парабола, расположенная ветвями вниз, поэтому максимальное значение будет достигаться в вершине параболы. Если $N=2k$ четное число, то абсцисса вершины параболы $N/2$ является целым числом и максимальное число возможных столкновений равно k^2 . Если же $N=2k+1$ нечетное число, то абсцисса вершины параболы $N/2$ является дробным числом. Поэтому максимальное число возможных столкновений будет равно значению функции $f(k)=k(k+1)$ в ближайшем к $N/2$ целом значении аргумента x .

Ответ: k^2 столкновений при четном $N=2k$ и $k(k+1)$ столкновений при нечетном $N=2k+1$.

2 способ

Ключевая идея для решения этой задачи – "модель призраков". Представим, что жуки – это нематериальные "призраки", которые проходят сквозь друг друга, не меняя направления.

В этой модели столкновения как такового нет. Однако, если мы посмотрим на реальных жуков, которые отскакивают, то результат (конечный набор положений и скоростей всех жуков) будет абсолютно таким же, как если бы они прошли друг сквозь друга (так как все жуки неотличимы).

В "модели призраков" столкновение между двумя реальными жуками происходит тогда и только тогда, когда один "призрак" обгоняет другого.

В нашей задаче все жуки имеют одинаковую скорость, поэтому "призраки", движущиеся в одном направлении, никогда не столкнутся. Следовательно, столкновение происходит только между "призраками", движущимися навстречу друг другу.

Каждый жук, движущийся направо, рано или поздно встретится (пройдет сквозь) каждого жука, движущегося налево.

Таким образом, если x жуков движутся вправо, а $N-x$ — влево, общее число столкновений будет равно числу пар "право-лево", то есть $x \cdot (N-x)$.

Начальные положения жуков и длина палки не влияют на общее число столкновений, а только на то, когда и где они произойдут.

Пусть x жуков бежит в одну сторону, а $N-x$ в другую. Тогда каждый из x жуков встретит на своем пути $N-x$ жуков и общее число встреч (столкновений) равно $f(x) = x(N-x)$. Графиком функции $f(x)$ является парабола, расположенная ветвями вниз, поэтому максимальное значение будет достигаться в вершине параболы. Если $N = 2k$ четное число, то абсцисса вершины параболы $\frac{N}{2}$ - является целым числом и максимальное число возможных столкновений равно k^2 . Если же $N = 2k + 1$ нечетное число, то абсцисса вершины параболы $\frac{N}{2}$ - является дробным числом. Поэтому максимальное число возможных столкновений будет равно значению функции $f(k) = k(k+1)$ в ближайшем k - целом значении аргумента x .

Ответ: k^2 столкновений при четном $N = 2k$ и $k(k+1)$ столкновений при нечетном $N = 2k + 1$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности (Участник сразу, без обоснования, переходит к модели $f(x) = x(N-x)$. То есть ключевой физический/логический шаг задачи опущен. Однако вся последующая математическая часть верна).
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная вычислительная ошибка
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы. Общая логика верна, но математический аппарат для нахождения максимума применен с погрешностями.
3	Верно составлена математическая модель, но участник не смог продвинуться дальше к решению ИЛИ дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
2	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца, общая математическая модель не построена.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении или приведен ответ без решения. Участник просто написал формулы из ответа без каких-либо пояснений Или правильно решил задачу для конкретного N
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

5.Задание: Найдите все множества натуральных чисел таких, что сумма и произведение любых двух натуральных чисел из этого множества принадлежит искомому множеству.

1 способ:

Решение:

Для решения задачи нужно проверить, какие множества натуральных чисел удовлетворяют условию: сумма и произведение любых двух чисел из этого множества также должны принадлежать этому множеству.

Множество $\{1\}$:

Сумма любых двух чисел из этого множества: $1+1=2$ (не принадлежит множеству $\{1\}$).

Произведение любых двух чисел из этого множества: $1 \cdot 1=1$ (принадлежит множеству $\{1\}$).

Значит, множество $\{1\}$ не удовлетворяет условию, так как сумма не принадлежит множеству.

Множество $\{1, 2\}$:

Сумма любых двух чисел из этого множества:

$1+1=2$ (принадлежит множеству $\{1, 2\}$)

$1+2=3$ (не принадлежит множеству $\{1, 2\}$)

$2+1=3$ (не принадлежит множеству $\{1, 2\}$)

Произведение любых двух чисел из этого множества:

$1 \cdot 1=1$ (принадлежит множеству $\{1, 2\}$)

$1 \cdot 2=2$ (принадлежит множеству $\{1, 2\}$)

$2 \cdot 1=2$ (принадлежит множеству $\{1, 2\}$)

$2 \cdot 2=4$ (не принадлежит множеству $\{1, 2\}$) Значит, множество $\{1, 2\}$ не удовлетворяет

условию, так как сумма не принадлежит множеству.

Множество $\{1, 2, 3\}$:

Сумма любых двух чисел из этого множества:

$1+1=2$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$1+2=3$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$1+3=4$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$2+1=3$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$2+2=4$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$2+3=5$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$3+1=4$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$3+2=5$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$3+3=6$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

Произведение любых двух чисел из этого множества:

$1 \cdot 1=1$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$1 \cdot 2=2$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$1 \cdot 3=3$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$2 \cdot 1=2$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$2 \cdot 2=4$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$2 \cdot 3=6$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$3 \cdot 1=3$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$3 \cdot 2=6$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

$3 \cdot 3=9$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$)

Значит, множество $\{1, 2, 3\}$ не удовлетворяет условию, так как сумма и произведение не принадлежат множеству.

Множество $\{1, 2, 3, 4\}$:

Сумма любых двух чисел из этого множества:

$1+1=2$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)

$1+2=3$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)

$1+3=4$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)

$1+4=5$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $2+1=3$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $2+2=4$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $2+3=5$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $2+4=6$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $3+1=4$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $3+2=5$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $3+3=6$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $3+4=7$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $4+1=5$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $4+2=6$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $4+3=7$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $4+4=8$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)

Произведение любых двух чисел из этого множества:

$1 \cdot 1 = 1$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $1 \cdot 2 = 2$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $1 \cdot 3 = 3$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $1 \cdot 4 = 4$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $2 \cdot 1 = 2$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $2 \cdot 2 = 4$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $2 \cdot 3 = 6$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $2 \cdot 4 = 8$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $3 \cdot 1 = 3$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $3 \cdot 2 = 6$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $3 \cdot 3 = 9$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $3 \cdot 4 = 12$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $4 \cdot 1 = 4$ (принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $4 \cdot 2 = 8$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $4 \cdot 3 = 12$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)
 $4 \cdot 4 = 16$ (не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$)

Значит, множество $\{1, 2, 3, 4\}$ не удовлетворяет условию, так как сумма и произведение не принадлежат множеству.

Множество всех натуральных чисел:

Сумма любых двух натуральных чисел из этого множества всегда будет натуральным числом, и произведение любых двух натуральных чисел из этого множества также всегда будет натуральным числом.

Таким образом, множество всех натуральных чисел удовлетворяет условию.

Ответ: Множество всех натуральных чисел.

2 способ:

Решение:

Для начала проверим, что множества $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, а также множество всех натуральных чисел.

Для последнего множества это очевидно.

Для первых четырех заметим, что если натуральные числа $a \in A$ и $b \in A$ таковы, что $a + b \leq 4$, то либо они оба равны 2, либо одно из них равно 1; в любом из этих случаев имеем $ab \leq a + b$. Значит, если $a + b \in A$, то и $ab \in A$.

Пусть теперь A — произвольное множество. Если A содержит некоторое число $k > 2$, то по условию оно также содержит число $1 \cdot (k - 1) = k - 1$. Продолжая этот процесс, получаем, что все натуральные числа, не превосходящие k , лежат в A . В частности, если A не содержит чисел, больших 4, то множество A уже перечислено в ответе.

Ответ: Множество всех натуральных чисел, а также множества $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности.
5	Ход решения верный, но в решении упущен один или несколько из ответов
4	Дан верный ответ и показано, что искомое множество, в котором есть число, большее 4, содержит бесконечно много чисел
3	Дан верный ответ, но ясного обоснования решение не содержит.
2	Приведены идеи для решения, но не доведены до конца.
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований.
0	Решение отсутствует или решение показывает незнание соответствующего материала.