

Решения задач, 9 класс

9.1. Известно, что для натуральных чисел x , y и z выполняются равенства

$$7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8 \quad \text{и} \quad 16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3.$$

Найдите значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ. 165.

Решение. Выразим из обоих равенств x^2 и приравняем полученные выражения

$$\frac{8 - 4z^2 + 3y^2}{7} = \frac{-3 - 9z^2 + 7y^2}{16}.$$

Откуда получаем

$$128 - 64z^2 + 48y^2 = -21 - 63z^2 + 49y^2$$

или

$$z^2 + y^2 = 149.$$

Поскольку числа z и y натуральные, то $z = 10$, а $y = 7$. Тогда $x = 4$ и

$$x^2 + y^2 + z^2 = 165.$$

□

9.2. Пусть $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Известно, что

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq \frac{1}{2}.$$

Докажите, что

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \geq \frac{1}{2}.$$

Решение. Преобразуем левую часть доказываемого неравенства

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 1 - (x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2(1 - x_3) + x_2x_3 + x_1x_3.$$

Из условия ясно, что

$$x_1x_2(1 - x_3) \geq 0, \quad x_2x_3 \geq 0, \quad x_1x_3 \geq 0.$$

Таким образом,

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \geq 1 - (x_1 + x_2 + x_3) \geq \frac{1}{2}.$$

Равенство здесь возможно, когда одно из чисел равно $\frac{1}{2}$, а два других равны 0.

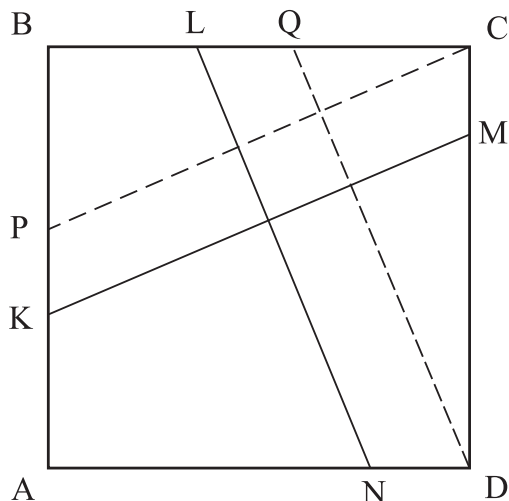
□

9.3. На сторонах AB , BC , CD и DA квадрата $ABCD$, $AB = 1$, взяты соответственно точки K , L , M и N так, что

$$AK + LC + CM + NA = 2.$$

Докажите, что отрезки KM и LN перпендикулярны.

Решение.



Проведём $CP \parallel MK$ и $DQ \parallel NL$, тогда $CMKP$ и $DQLN$ – параллелограммы, а это означает, что $KP = CM$ и $LQ = DN$. Тогда справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} AK + LC + CM + NA &= AK + LQ + CQ + CM + NA = AK + KP + DN + NA + CQ = \\ &= AP + AD + CQ = 2 - BP + CQ. \end{aligned}$$

Откуда получаем, что $CQ = BP$ и треугольник DQC равен треугольнику CPB .

Таким образом,

$$\angle QDC = \angle PCB = 90^\circ - \angle PCD$$

и $DQ \perp CP$, а это означает, что $LN \perp KM$.

□

9.4. На гранях 27 кубиков написаны числа от 1 до 6: на каждом кубике произвольным образом написаны все числа от 1 до 6. Из этих 27 кубиков Алёша сложил куб. При этом у любых двух кубиков, соприкасающихся гранями, на этих гранях написаны числа, отличающиеся ровно на 1. После этого Алёша подсчитал суммы чисел, записанных на каждой из граней. Мог ли он получить шесть одинаковых сумм?

Ответ. Не сможет.

Решение. Можно заметить, что сумма чисел, записанных на двух соприкасающихся гранях, нечётна. Таких пар граней в кубе $3 \times 3 \times 6 = 54$. Таким образом, сумма чисел, записанных на гранях, расположенных внутри куба, есть сумма 54 нечётных чисел, а это означает, что она чётна. Пусть она равна $2S$. Тогда посчитав сумму чисел, записанных на поверхности большого куба, получаем

$$(11 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 27 - 2S$$

нечётное число. Отсюда следует, что оно не может быть равно $6n$.

□

9.5. Сумма n чисел, записанных по кругу равна 106. Известно, что любое число равно модулю разности двух следующих за ним чисел. Найдите все возможные значения n .

Ответ. $n = 1$ или $n = 159$.

Решение. Из условия задачи следует, что все записанные числа неотрицательны. Пусть a – наибольшее из них, а если их несколько, то выберем любое из них. Числа b , c , d и e – следующие за ним по кругу. Тогда $a = |b - c|$, что возможно, только если одно из чисел b или c равно a , а другое 0.

Если $b = a$, $c = 0$, то из равенства $b = |c - d|$ следует, что $d = a$. Далее из равенства $c = |d - e|$ получаем, что $e = a$, и так далее.

Таким образом, n делится на 3, то есть $n = 3m$, а записанные числа будут иметь вид

$$a, a, 0, a, a, 0, \dots, a, a, 0.$$

Их сумма равна $2ma$. Из равенства $2ma = 106$ получаем, что $ma = 53$, то есть $m = 53$, $a = 1$ или $m = 1$, $a = 53$, а значит, $n = 159$ или $n = 3$.

□