

1. **Ответ:** Петя. **Решение.** Первым ходом Петя должен взять со стола 5 монет. Далее в ответ на ход Васи, состоящий в том, что Вася берёт $2k$ монет, Петя берёт $101 - 2k$ монет. Таким образом, за ход Васи и за ответный ход Пети количество монет на столе суммарно уменьшается на 101. Поскольку $2025 = 101 \cdot 20 + 5$, то после 20 таких пар ходов на столе не останется монет, и Вася (который должен будет делать ход в этот момент) проиграет.

Проверим, что Петя всегда может сделать ответный ход по своей стратегии. Заметим, что число $101 - 2k$ нечётно. Так как Вася берёт от 2 до 100 монет, то $1 \leq k \leq 50$, поэтому $2 \leq 2k \leq 100$, а значит, $101 - 100 \leq 101 - 2k \leq 101 - 2$, т.е. от Пети требуется взять нечётное количество монет от 1 до 99. Он может это сделать по правилам игры.

2. **Ответ:** 18. **Решение.** Пусть $n = 10a + b$, где b – цифра единиц числа n . Тогда a – число, полученное из n вычеркиванием цифры единиц. Так как n как минимум двузначно, $a \geq 1$. Число, полученное вставкой цифры c между разрядом десятков и разрядом единиц числа n , равно $100a + 10c + b$. По условию задачи $100a + 10c + b = 6 \cdot (10a + b)$, откуда $40a + 10c = 5b$, или $8a + 2c = b$.

Если $a \geq 2$, то $8a + 2c$ будет как минимум двузначным числом и, следовательно, больше b . Значит $a = 1$.

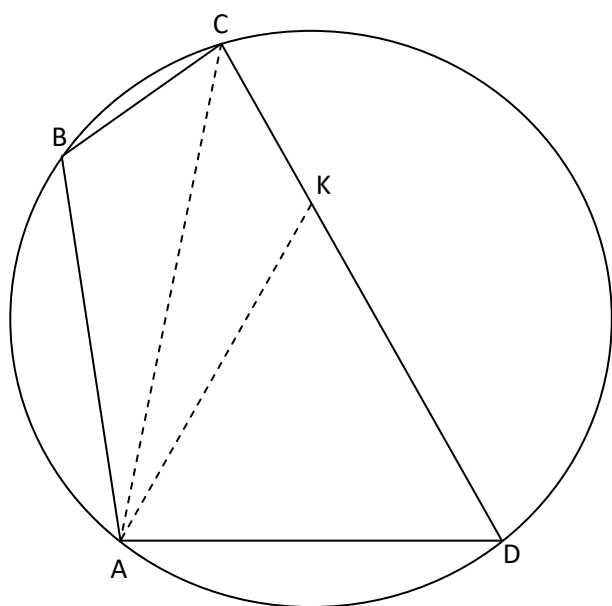
Если $c \geq 1$, то $8 + 2c$ будет как минимум двузначным числом и, следовательно, больше b . Значит, $c = 0$.

Подставляя найденные a, c в равенство $8a + 2c = b$, находим $b = 8$.

3. **Ответ:** можно. **Решение.** Разложим каждое из натуральных чисел на простые множители, которые не будем группировать в степени; будем считать, что в разложении числа 1 имеется 0 простых множителей. Числа, равные произведению чётного количества простых множителей, покрасим в первый цвет, а остальные натуральные числа – во второй цвет. Проверим, что данная раскраска чисел удовлетворяет условию задачи.

В самом деле, пусть a и c – не равные друг другу натуральные числа такие, что $a = cd$, где d – некоторое натуральное число. $d \neq 1$; пусть p – простой делитель числа d . Заметим, что $p \neq d$, так как в противном случае число a было бы равно произведению тех же простых множителей, что и число c , и также дополнительного простого p , поэтому чётность количества простых множителей в разложениях чисел a и c была бы различной, и числа a и c были бы покрашены в разные цвета. Поэтому $d = pk$, где k – некоторое натуральное число. Рассмотрим числа $a = cpk, pc, c$; заметим, что pc является разделяющим для a и c . По предположению числа a и c одного цвета, поэтому число $p \cdot c$ другого цвета (его цвет не совпадает с цветом числа c); это и требовалось.

4. **Ответ:** 60° . **Решение.** Пусть точка K на стороне CD такова, что $CK = CB$. Тогда $KD = AB = AD$. Углы BAC и DCA равны как вписанные в одну окружность и опирающиеся на дуги, стягиваемые равными хордами, поэтому треугольники ABC и AKC равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AK = AB$. Треугольник AKD равносторонний (по трём сторонам), откуда $\angle CDA = 60^\circ$.



5. **Ответ:** не может. **Решение.** Предположим, что требуемая раскраска существует; для каждой клетки среди её соседей по стороне ровно две клетки её цвета.

Для любой клетки K рассмотрим все клетки того же цвета, что и она, до которых от неё можно добраться, каждый раз переходя в соседнюю по стороне клетку того же цвета. Такой набор клеток назовём кляксой. Доска 15×15 клеток разделена на кляксы; все клетки в кляксе одного цвета. Соседними могут быть только разноцветные кляксы (две кляксы мы будем считать соседними, если существуют клетка K_1 , принадлежащая первой кляксе, и клетка K_2 , принадлежащая второй кляксе, такие, что у K_1 и K_2 есть общая сторона).

Если рассматривать кляксу с теоретико-графовых позиций (центр клетки – это вершина графа; пара соседних по стороне клеток одного цвета – ребро графа), то все вершины кляксы будут иметь степень 2. Но тогда каждая клякса — это простой цикл (т.е. конечная последовательность вершин такая, что каждая вершина соединена ровно с двумя вершинами – со следующей и с предыдущей; единственное исключение – первая вершина соединена с последней). В простом цикле чётное количество клеток (это можно доказать разными способами, см. далее), значит, во всех кляксах вместе тоже чётное количество клеток. Но площадь доски нечётна; противоречие.

Доказательство того, что площадь кляксы чётная. Первый способ. Будем двигаться по циклу, пока не вернёмся в исходную клетку; тогда ходов вверх мы сделаем столько, сколько вниз, а влево — столько, сколько вправо. (Если, например, ходов вверх сделано больше, чем ходов вниз, то в конце пути мы окажемся выше, чем были в начале, но мы вернулись в исходную клетку.) Итак, сделано вертикальных ходов чётное число, и горизонтальных ходов тоже чётное число. Поэтому общее число ходов чётное. Но мы в процессе обхода цикла из каждой клетки вышли один раз, поэтому ходов сделано столько же, сколько клеток в цикле. Значит, площадь кляксы чётная.

Второй способ. Нетрудно проверить, что цикле чередуются клетки, которые были бы чёрными и белыми при шахматной раскраске. Всегда, когда цикл состоит из чередующихся объектов, их количество чётное. Вариация второго способа: можно занумеровать строки снизу вверх числами от 1 до 15, столбцы слева направо числами от 1 до 15, для каждой клетки рассмотреть сумму номера её строки и номера её столбца; заметить, что при переходе на соседнюю клетку одна из координат не меняется, другая меняется на 1, поэтому чётность суммы координат меняется на противоположную, а значит, переходов сделано чётное число.